

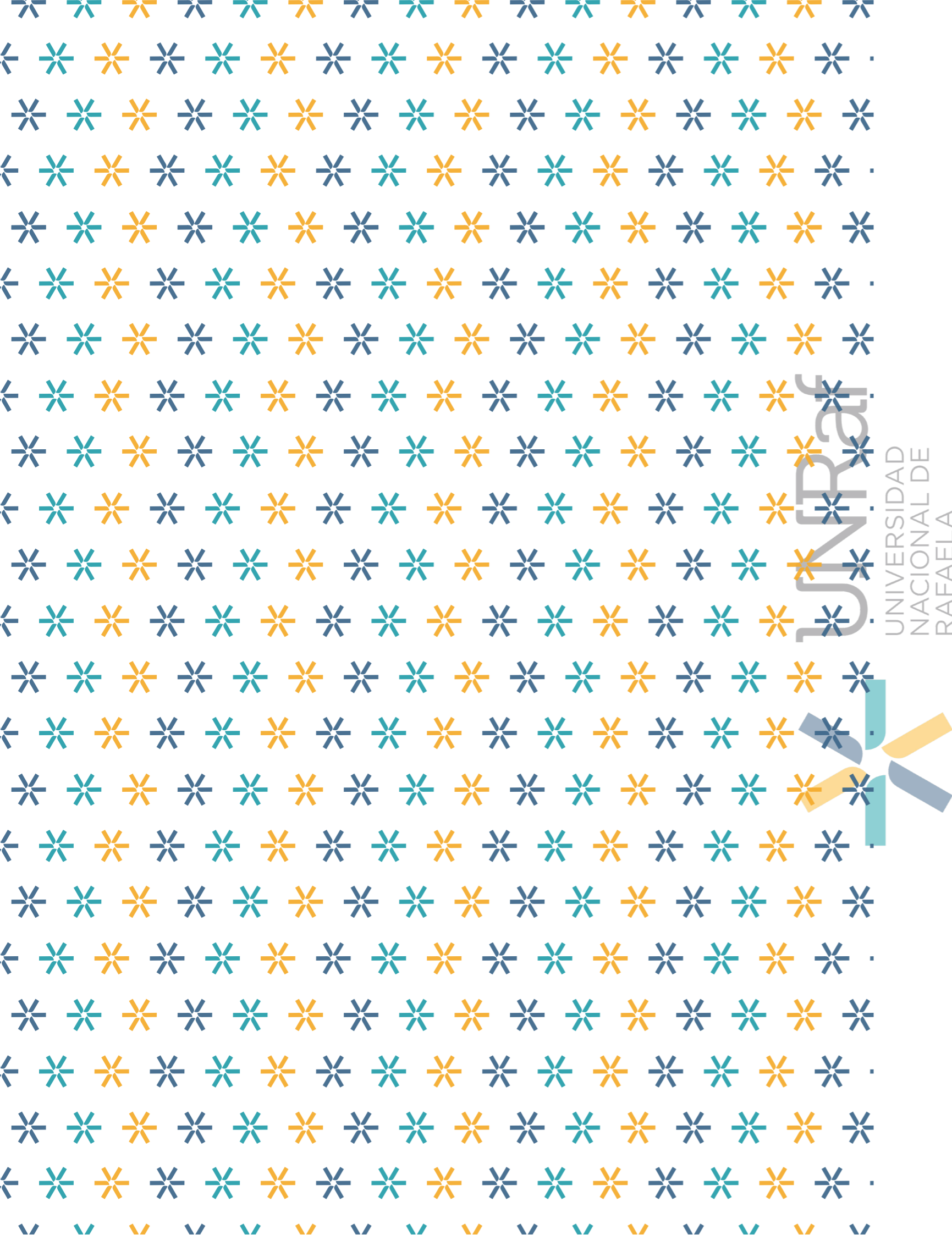
#14

# CUANDO LAS FORMULAS SE TRANSFORMAN EN OBJETOS

---

Carrera  
Licenciatura en Diseño Industrial

Autores  
Motta Milessi, Natalia / Walker, Carlos



## PRESENTACIÓN

Presentar esta producción que se inscribe en una nueva línea de trabajo de nuestra editorial universitaria, que denominamos “Colección Libros de Cátedras”, supone un compromiso de apoyo y celebración institucional y profesional que no se puede eludir, pese a la multiplicidad de tareas y compromisos que conlleva la gestión académica en una novel institución universitaria que se halla en plena etapa de definiciones y crecimiento.

Mediante esta iniciativa se pretende potenciar las capacidades de los equipos docentes de las distintas propuestas formativas y Facultades de la UNRAf, para producir textos de apoyo a las actividades de enseñanza-aprendizaje y formación, así como también generar instancias de socialización e intercambios multidisciplinares e interdisciplinares que expresan parte de las indagaciones, problemáticas y reflexiones generadas en este particular escenario institucional y académico, enclavado en el centro oeste del territorio nacional.

Esta serie, en particular, reúne un conjunto de producciones seleccionadas en el marco de la II Convocatoria Institucional, realizada en el año 2023 y aprobada por Resolución CS N° 011/2021. Se abordan, en este caso, un conjunto de temáticas diversas que abarca: administración de la información, entrenamiento deportivo, procesos en la era de la transformación digital, formación y prácticas docentes en los escenarios actuales, diseño industrial, macroeconomía, entre otras.

Ponderamos la calidad de los trabajos, así como también el nivel académico, la trayectoria profesional y el compromiso de sus autores en torno a estas temáticas y problemáticas y para con esta iniciativa institucional, considerada de relevancia para el presente y futuro de esta Universidad.

Agradecemos a las y los responsables de cada una de las publicaciones, a sus equipos de trabajo y a los/as integrantes de Ediciones UNRAf, por ayudarnos concretar este proyecto.

**Mg. Cecilia Gutiérrez**

Decana Facultad de Estudios  
Profesionales

**Bq. Fabiana Gentinetta**

Decana Facultad de Tecnologías e  
Innovación Para El Desarrollo

**Dr. Jorge Daniel Rodríguez**

Decano Facultad de Ciencias  
Sociales y Humanidades

Cuando las formulas se transforman en objetos / Natalia Motta Milessi ; Carlos Walker. - 1a ed. -  
Rafaela : Ediciones UNRaf, 2024.  
Libro digital, PDF - (Cuadernos de cátedra)

Archivo Digital: descarga y online  
ISBN 978-987-4920-76-8

1. Matemática Aplicada. 2. Diseño Industrial. 3. Ejercicios. I. Walker, Carlos II. Título  
CDD 510



©Universidad Nacional de Rafaela, 2024

Bv. Roca 989, Rafaela  
Santa Fe, Argentina  
Tel. (+54 03492) 501155  
info@unraf.edu.ar  
editorial@unraf.edu.ar  
<http://www.unraf.edu.ar/>

#### Autoridades UNRaf

##### Rector

Dr. Rubén Ascúa

##### Vicerrectora

Mg. María Cecilia Gutiérrez

##### Decana

BQ. Fabiana Gentinetta

##### A/C Dirección editorial

Lic. Fernando García

##### Coordinación editorial

Lic. María Guadalupe Rey

##### Diseño editorial

Lic. María Guadalupe Rey

Tec. Francisco Intelangelo

##### Corrección

Mag. María Eugenia Meyer

La responsabilidad por los contenidos y las opiniones expresadas en los libros, artículos, estudios y otras colaboraciones publicadas por Ediciones UNRaf incumbe exclusivamente a los autores firmantes y su publicación no necesariamente refleja los puntos de vista ni del Director Editorial, ni del Consejo Editor u otra autoridad de la UNRaf.



**Atribución - No Comercial - Compartir por igual 4.0 Internacional (by-nc-sa 4.0):** No se permite un uso comercial de la obra original ni la generación de obras derivadas. Esta licencia no es una licencia libre, y es la más cercana al derecho de autor tradicional.



**Atribución (Attribution):** En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia será necesario reconocer la autoría (obligatoria en todos los casos).



**No Comercial (Non commercial):** La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.



**Compartir por igual (ShareAlike):** En caso de modificación, transformación o construcción sobre el material, se debe distribuir la contribución bajo la misma licencia que la original.



# #14

## CUANDO LAS FORMULAS SE TRANSFORMAN EN OBJETOS

Carrera  
Licenciatura en Diseño Industrial

Autores  
Motta Milessi, Natalia / Walker, Carlos



## Índice

<b>01: Razones y Proporciones</b> .....	8
<b>02: Trigonometría</b> .....	44
<b>03: Polígonos y Poliedros</b> .....	84
<b>Guía de Ejercicios</b> .....	112
<b>04: Cónicas</b> .....	120
<b>05: Guía de Ejercicios Nro 4 - Las Cónicas</b> .....	144

# 01.

## Razones y Proporciones

¿Por qué los objetos tienen una determinada forma o ciertas dimensiones?, ¿por qué los espacios se construyen en base a ciertas proporciones?, ¿cómo se distribuyen los pétalos de las flores o cómo se comporta la geometría de los copos de nieve?, son interrogantes que han fascinado a muchos estudiosos de distintas áreas, desde artistas hasta matemáticos a lo largo de la historia.

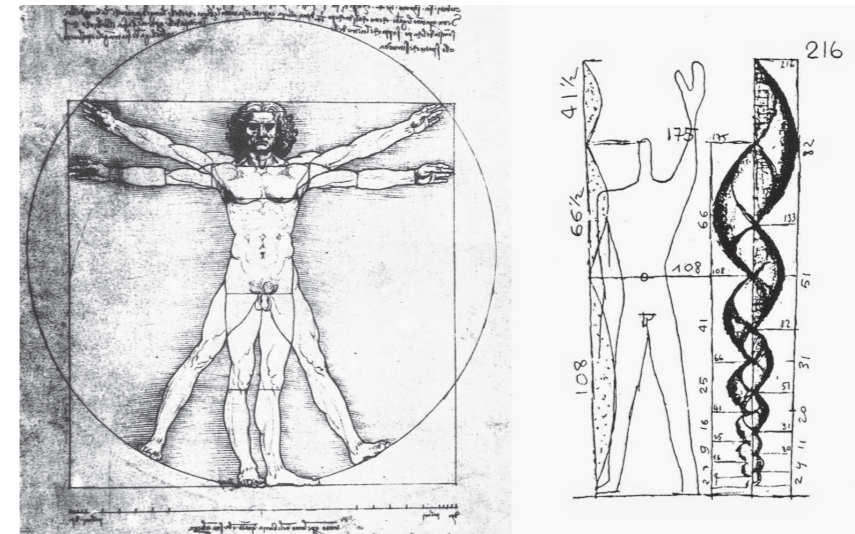


Imagen 1.1  
Archdaily.cl

Las respuestas a todas las inquietudes antes mencionadas comparten una respuesta en común: **la proporción**.

La proporción tiene una larga historia en el mundo del arte y del diseño. Los antiguos egipcios ya usaban un sistema de cuadrícula en los murales que los ayudaba a crear una guía para establecer jerarquía. Luego, ese sistema se fue perfeccionando y ganando importancia a lo largo de los años.

Pero no solo en Occidente se utilizaba un sistema basado en proporciones. En Japón se utilizaba el Ken como medida estética y cultural para dimensionar edificios.

La proporción está fuertemente relacionada con el diseño de los objetos y los espacios.

A lo largo de la siguiente unidad te enseñaremos básicamente cuestiones referidas al cálculo de estas proporciones.

### Razón



En Matemática, una razón es la comparación de dos cantidades, por medio de división o cociente.

Es importante saber que esos valores precisan estar en la misma unidad de medida y que el denominador debe ser diferente de 0.

Por una cuestión de convención, normalmente se coloca el mayor número en el numerador y el número menor en el denominador.

Por ejemplo, si la ganancia de una empresa es de 15.000 y el gasto de la misma es 5.000, ¿cuál es la razón de la empresa?

$$\text{Hacemos } \frac{15.000}{5.000} = 3$$

**Ejemplo:**

En su actividad normal el corazón de un adulto late alrededor de 70 veces por minuto, mientras que el de un recién nacido alcanza 140 latidos por minuto.

$$\frac{\text{número de latidos del corazón del recién nacido}}{\text{números de latidos del corazón del adulto}} = \frac{140}{70} = 2$$

**Respuesta:** la razón de latidos entre un adulto y un recién nacido es igual a 2.

La razón entre a y b, cuando b es un número distinto de cero, se escribe:  $\frac{a}{b}$  y se lee « a es a b »

Imagen 1.2  
Elaboración propia

El numerador recibe el nombre de antecedente

$$\frac{a}{b}, \text{ con } b \neq 0$$

El denominador recibe el nombre de consecuente

Por ejemplo, la razón entre 6 y 5 se escribe:  $\frac{6}{5}$  y la leemos 6 es a 5 .

¿Cómo calculamos una razón?

Calcular una razón, significa determinar el valor de esta, que se establece haciendo la división entre el antecedente y el consecuente.

Por ejemplo, el valor de la razón 2 es a 5, m es  $\frac{2}{5} = 2:5 = 0,4$

Otro ejemplo. La Velocidad es una razón entre la distancia y el tiempo empleado. Si recorremos 588 km y empleamos 12 horas, la velocidad es la razón 588 es a 12 o sea 49 ( km/hora).

**Problemas :**

1. Un rectángulo mide 50 cm de ancho y 20 cm de alto. Hallar la razón entre el ancho y el alto. ¿Qué nos indica la razón?

**Solución:**



Calculamos el cociente entre el ancho del rectángulo y su altura  $\frac{50}{20} = 2,5$

La razón es 2,5 e indica que la anchura es 2,5 veces la altura.

2. Una chica tiene 15 años y su padre 45 años. Hallar la razón entre la edad de la hija y la edad del padre. Explica qué significa la razón.

**Solución:**

Calculamos el cociente entre la edad de la hija y la edad del padre  $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

**Respuesta:**

La razón es 1/3 e indica que la edad de la hija es la tercera parte de la edad del padre.

**Proporciones**

Cuatro números a, b ,c ,d forman una proporción cuando la razón entre los dos primeros es igual a la razón entre los dos últimos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k ; \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0$$

Imagen 1.3  
Elaboración propia

Se lee: « a es a b como c es a d ».

k: constante de proporcionalidad.

a, d : se denominan extremos de la proporción.

b, c : se denominan medios de la proporción.

**Teorema fundamental de las proporciones**

El teorema fundamental de las proporciones establece que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

(para que pueda existir la razón debe ser a ≠ 0 y c ≠ 0)

En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios

Ejemplos:

- a.  $\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = 2,3333 \dots$
- b.  $\frac{10}{50} = \frac{5}{25} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} = 0,2$
- c.  $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{100}{50} = 2$

Problemas:

- a. Una tubería tiene una fuga de agua y pierde 322 litros de agua cada 7 minutos. ¿En cuánto tiempo se perderán 2.300 litros?

Solución:

$$\text{Planteamos } \frac{322}{7} = \frac{2300}{x}$$

Aplicando el Teorema fundamental de las proporciones, resulta  $322 \cdot x = 2300 \cdot 7$

$$\text{Despejando y operando: } x = \frac{16100}{322} = 50 \text{ minutos}$$

- b. Un rectángulo tiene 25 centímetros de base y 18 centímetros de altura. ¿Qué altura deberá tener un rectángulo de 15 centímetros de base para que tenga la misma superficie?

Respuesta:

30 cm de altura.

Solución:

Planteamos, recordando que el área de un rectángulo es  $b \times h$ , entonces  $25 \times 18 = 15 \times x \Rightarrow$  despejando

$$x = \frac{25 \times 18}{15} = 30$$

### Proporción Ordinaria

Una proporción es ordinaria cuando los números medios (en este caso, el 3 y el 1,5) son distintos.

$$\text{Ej.: } \frac{2}{3} = \frac{1,5}{2,25}$$

### Proporción Continua

Una proporción es continua cuando los números medios (en este caso, 5 y 5) son iguales. Por ejemplo:  $\frac{4}{5} = \frac{5}{6,25}$

### Módulo De Un Rectángulo

El rectángulo es una de las figuras geométricas que encontramos frecuentemente en objetos de diseño. Es una figura plana, cuadrilátera, cuyos lados no adyacentes son paralelos e iguales. Sus lados adyacentes forman siempre un ángulo recto. Para comenzar, caracterizamos al rectángulo diciendo que es un polígono irregular equiángulo. El cociente entre el lado mayor y el menor de este polígono se denomina MÓDULO del rectángulo.

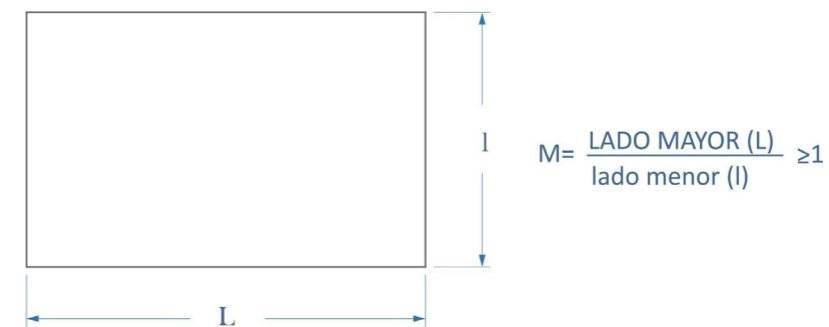


Imagen 1.4  
Elaboración propia

Dos rectángulos son proporcionales si poseen el mismo módulo. Existen infinitos rectángulos que poseen el mismo módulo y, por lo tanto, son proporcionales o semejantes. Por ejemplo, un rectángulo de 6 cm por 2 cm, es semejante a otro mayor de 12 cm por 4 cm, o a otro menor de 1,5 cm por 0,5 cm, ya que todos poseen módulo igual a 3.

### Rectángulos Estáticos Y Dinámicos

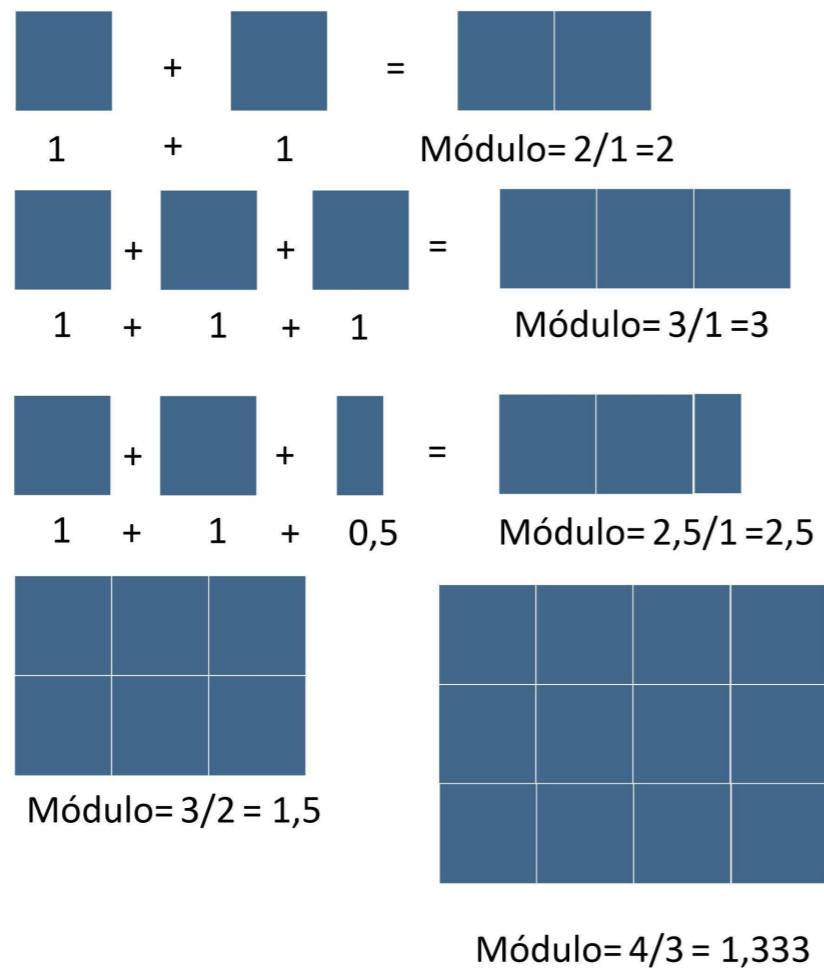
El módulo de un rectángulo puede ser un número racional o irracional, lo que da origen a una clasificación del rectángulo según su módulo. Esto es:



- a. Se llaman rectángulos estáticos a aquellos cuyo módulo es un número racional, esto es un entero o un fraccionario con un número finito de cifras periódicas.

En los rectángulos de proporciones racionales o estáticas el módulo de la figura es un número racional, es decir, un número que puede expresarse como el cociente entre dos números enteros. Los rectángulos graficados a continuación ejemplifican los módulos:  $M=2$ ,  $M=3$ ,  $M=2,5$ ,  $M=1,5$  y  $M=1,333...$

Imagen 1.5  
Elaboración propia



Obtención de un rectángulo de igual módulo a partir de un rectángulo dado:

El proceso para subdividir un rectángulo de manera que el nuevo rectángulo mantenga la misma proporción que el original implica trazar una diagonal del rectángulo original (denotada como AB). Luego, se dibuja un segmento perpendicular a esta diagonal (CD) desde uno de los vértices opuestos (C). A partir de este punto de intersección (D), se traza otro segmento perpendicular al lado AD hasta alcanzar otro

punto en la diagonal original (E). El rectángulo resultante, denotado como BCED, es similar al rectángulo original.

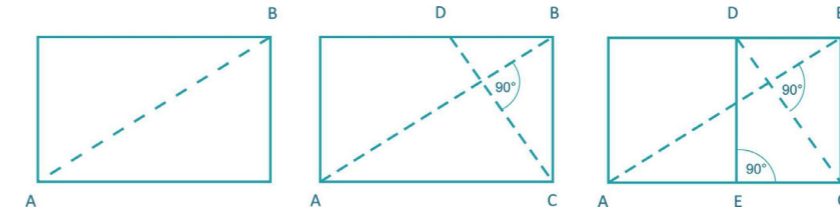


Imagen 1.6  
Elaboración propia

- b. En los rectángulos de proporciones irracionales o dinámicas, el módulo de la figura es un número irracional, es decir, aquel número que no puede expresarse como el cociente entre dos números enteros, y posee infinitas cifras decimales no periódicas. Son ejemplos:

$$M = \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \phi \text{ (Número de oro)}$$

### Representación Gráfica De Rectángulos Dinámicos

Supongamos que se desea representar un rectángulo de módulo  $\sqrt{2}$ . Se procederá de la siguiente manera:

- a. Se dibuja un cuadrado y se asigna a sus lados un valor unitario.

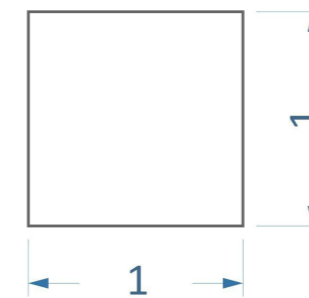


Imagen 1.7  
Elaboración propia

- b. Se traza la diagonal del mismo

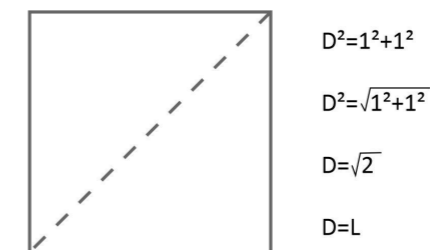
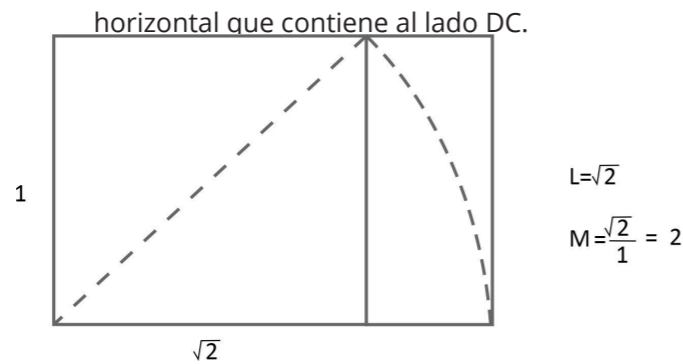


Imagen 1.8  
Elaboración propia

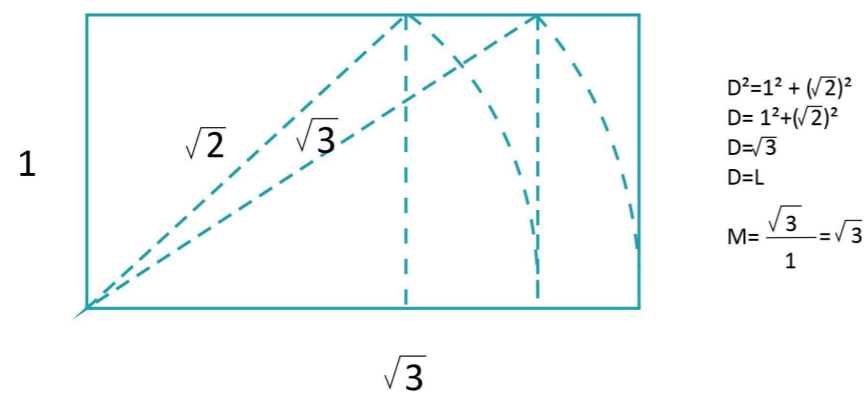
- c. Haciendo centro en el vértice D que contiene la diagonal trazada y con la medida de la misma, la rebato sobre la

Imagen 1.9  
Elaboración propia



El rectángulo de módulo se obtiene a partir de la diagonal de un cuadrado de lado igual a la unidad, tal como se observa en las imágenes. El rectángulo de módulo se obtiene a partir de la diagonal de un rectángulo de módulo  $\sqrt{2}$ .

Imagen 1.10  
Elaboración propia



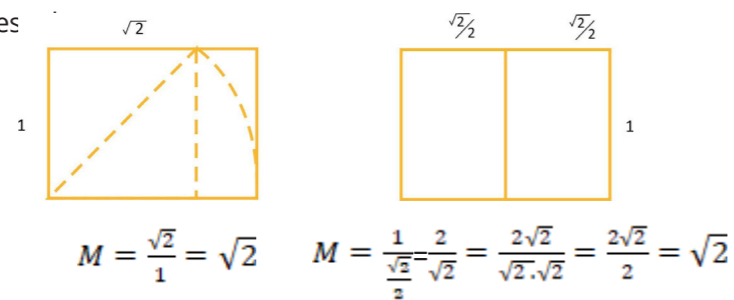
### Propiedades Del Rectángulo Dinámico

Pueden subdividirse en rectángulos semejantes, ya que mantienen el módulo. Esto significa que se mantiene la proporción o razón entre sus lados.

Al subdividir internamente cualquier rectángulo dinámico, se obtendrán rectángulos semejantes al dado (el módulo se mantiene).

Si dividimos a un rectángulo de  $M = \sqrt{2}$ , en dos rectángulos iguales

Imagen 1.11  
Elaboración propia



Si dividimos a un rectángulo de  $M = \sqrt{3}$ , en tres rectángulos iguales

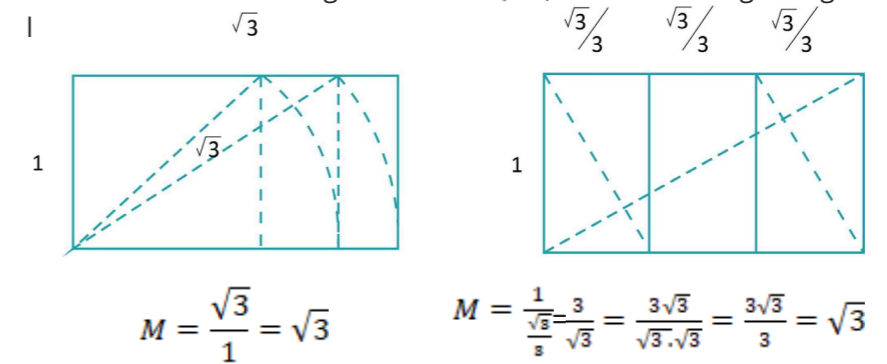


Imagen 1.12  
Elaboración propia

UNRaf

UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
RAFAELA



### El Rectángulo Áureo

La denominada PROPORCIÓN ÁUREA, también llamada SECCIÓN ÁUREA, RAZÓN ÁUREA, RAZÓN DORADA, entre otras acepciones, es uno de los temas que ha fascinado a la humanidad casi desde sus comienzos.

El origen exacto del término sección áurea es bastante incierto. Generalmente se sitúa en Alemania, en la primera mitad del siglo XIX. Muchos artistas, humanistas y matemáticos lo han tratado, aunque bajo distinto nombre y con distinta disposición. Otros nombres que recibe son "sección divina", "sección de oro", "proporción divina", "proporción dorada" o "número de oro".

#### Medida Áurea o Divina Proporción

En esta proporción interviene un "número divino", conocido como número de oro, el número dorado o número áureo, que es representado por la letra griega  $\Phi$  (Phi o Fi), en honor al escultor griego Fidias. El número  $\Phi$  (Número de Oro) = 1,618003398..., posee muchas propiedades interesantes y fue descubierto en la antigüedad, no como una "unidad" sino como una relación o proporción.

Los antiguos griegos implementaron esa proporción numérica como esencial para sus ideales de belleza y geometría (creían que la proporción áurea conducía a la salud y a la belleza). Esta proporción está totalmente vinculada a Pitágoras, filósofo y matemático griego, cuyas doctrinas influyeron mucho en Platón.

La existencia de un número nada fácil de imaginar convive con la humanidad porque aparece en la naturaleza y desde la época griega, como ya dijimos, y hasta nuestros días, en el arte y el diseño.

El rectángulo de módulo igual al número de oro tiene módulo

$$M = \phi (M=1,618\dots = \frac{1 + \sqrt{5}}{2})$$

Dicha proporción, como se mencionó anteriormente, ha sido de interés en el campo del diseño, ya que se asocia a la idea de armonía y belleza.

Sara Berndt, ingeniera de diseño, expresó:

“La proporción áurea trata del espacio libre en relación al espacio sobre el que quieres captar la atención. Hay un límite en lo que podemos percibir de forma visual. Es un principio para ayudarte a entender los límites de la atención humana, y lograr crear algo estéticamente agradable”.

Veamos cómo se llega a este número:

Consideremos un segmento de longitud igual a 1, al que se pretende dividir en dos segmentos, de modo que se cumpla la condición de que la razón entre la longitud total y la longitud del segmento más largo, sea igual a la razón entre el segmento más largo y el segmento más corto.

La longitud del segmento es de una unidad. Dividimos en dos segmentos de longitudes  $x$  (más larga) y  $1 - x$



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

De modo que se cumpla que

Para hallar el valor de  $x$ , resolvemos  $\Rightarrow 1 - x = x^2$

Resultando  $x^2 + x - 1 = 0$ , aplicando resolvente

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Las soluciones son:  $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

(no es solución del problema porque se trata de un número negativo).

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,618033\dots$  ( es un número irracional porque  $\sqrt{5}$  es irracional).



El resultado nos dice que para que un segmento quede dividido en la proporción áurea, se debe cortar por el  $\frac{1}{\phi}$  de su longitud.

Veamos cuál es la razón entre la longitud total del segmento (1 unidad) y la longitud del segmento mayor  $x$ , o sea:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1}$$

Racionalizamos el número, aplicando la técnica de multiplicar y dividir por el conjugado del denominador:

$$\frac{2}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4}$$

Que simplificando numerador con denominador resulta:

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi = 1,618033\dots$$

El número de oro:  $\phi = 1,618033\dots$

### Trazado del rectángulo de sección áurea

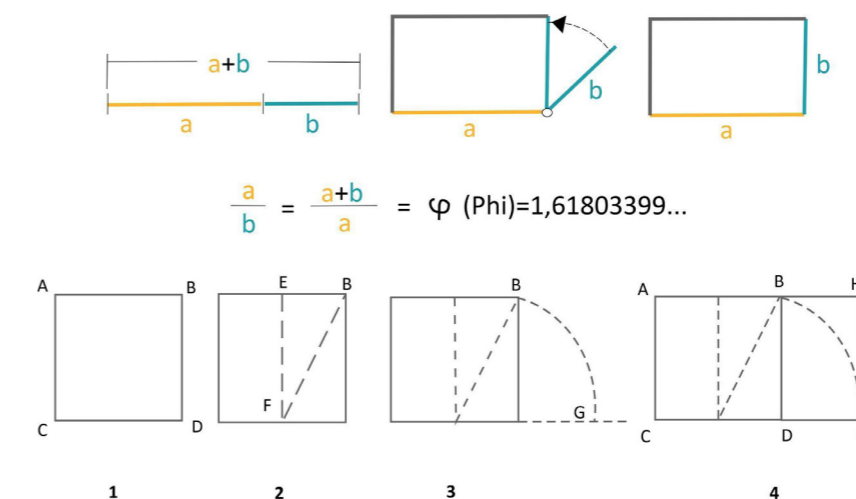


Imagen 1.13  
Elaboración propia

1) Trazamos un cuadrado de lado = 1 unidad.

2) Marcamos el punto medio de uno de sus lados y lo unimos con uno de los vértices del lado opuesto.

La longitud del segmento  $FB = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3) Llevamos esa distancia sobre el lado inicial, de esta manera, obtenemos el lado mayor del rectángulo que ahora mide

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

4) Obtenemos el rectángulo de sección áurea.

La sección áurea es una proporción específica que ha desempeñado un papel significativo en los intentos de encontrar una explicación matemática a la belleza. Se busca reducirla a un número o encontrar "la cifra ideal". Esta proporción ha sido conocida desde los albores de la humanidad. Los antiguos egipcios la descubrieron mientras buscaban medidas precisas para dividir la tierra. De Egipto, pasó a Grecia y luego a Roma.

En el trabajo de Policleto, un escultor del siglo V a.C., al que se le atribuye un tratado perdido sobre las proporciones del cuerpo humano, encontramos por primera vez el concepto de belleza basado en las proporciones ideales del cuerpo humano. Este concepto se refleja en sus obras maestras como "El Diadúmenos" y "El Doríforo", donde las construcciones siguen la sección áurea.

Euclides, un matemático griego del siglo V a.C., nos ofrece la primera fuente documental importante sobre esta sección, su cálculo y su trazado geométrico en su obra principal, "Elementos", un tratado extenso de Matemática que abarca temas como geometría plana, proporciones y geometría del espacio.

Posteriormente, Vitruvio, un arquitecto romano, vuelve a tratar la sección áurea en sus "Diez libros de arquitectura". Incluso Pitágoras, quien eligió la estrella pentagonal como símbolo para su escuela, muestra en todas sus relaciones la presencia de la sección áurea.

Además, la sección áurea también se puede encontrar en el Partenon, destacando su relevancia en la arquitectura clásica.

Imagen 1.14  
Elaboración propia



Durante el Renacimiento, numerosos autores retomaron este canon de la sección áurea. El monje franciscano, Luca Pacioli (1445-1514), la denominó "divina proporción", en su tratado "De Divina Proportione", donde exploró en detalle sus propiedades y relaciones. Por otro lado, Leonardo da Vinci (1452-1519) incorporó la proporción áurea en su célebre obra "La Gioconda". En esta obra maestra, las proporciones del cuadro reflejan la presencia de la proporción áurea, tanto en las dimensiones del rostro como en el espacio entre el cuello y la mano, y entre el escote del vestido y el final de la mano.

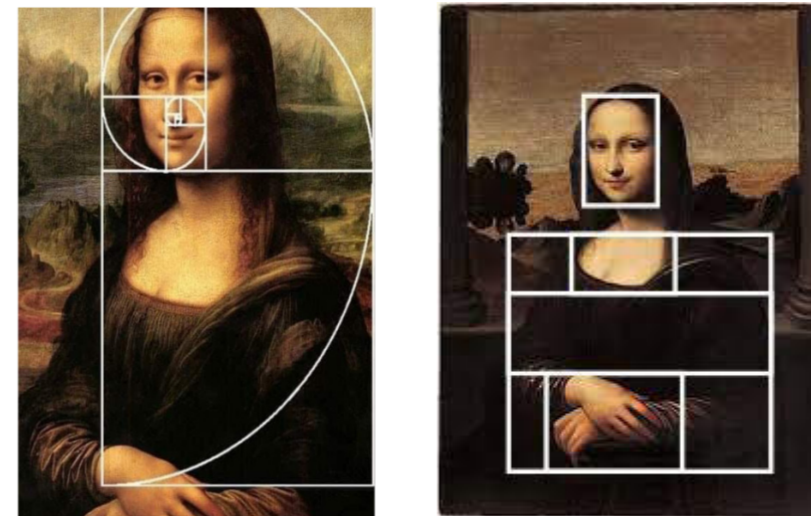


Imagen 1.15  
Elaboración propia

Imagen 1.16  
Elaboración propia

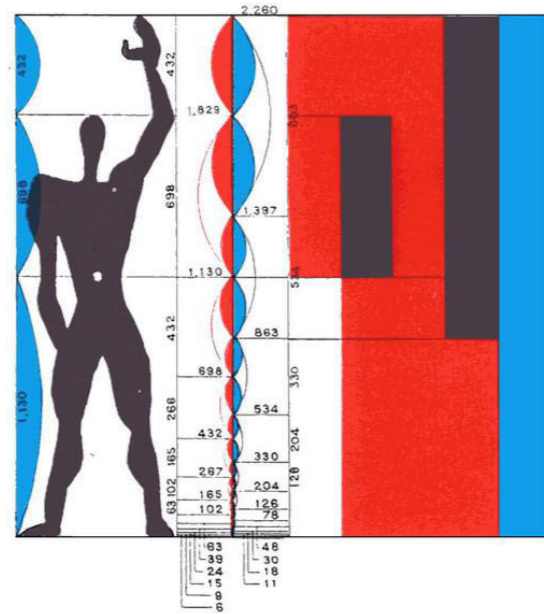
Otros artistas, como Durero (1471-1528), destacaron la relación entre el número áureo y las proporciones humanas, elogiando la apariencia de armonía y equilibrio que presentan las obras creadas utilizando esta proporción. Uno de los últimos renacentistas que elogió sus virtudes fue Kepler (1571-1630), quien afirmaba que había "dos tesoros en la geometría (...), uno el teorema de Pitágoras y otro la división proporcional (...), una joya".

Después, esta regla divina cayó en el olvido hasta el siglo XIX. En este período, fue resaltada nuevamente como principio morfológico por el alemán Zeising, quien en 1855 afirmó en su obra "Aesthetische Forschungen": "Para que un todo, dividido en partes desiguales, parezca hermoso, desde el punto de vista de la forma, debe haber entre la parte menor y la mayor la misma razón que entre la mayor y el todo". En el mismo siglo, pintores como Seurat (1859-1891) y Cézanne (1839-1906) buscaron nuevamente la armonía y la belleza en el arte mediante estrictas reglas geométricas, incluida la regla áurea. En arquitectura, destaca sin duda Le Corbusier (1887-1965), quien en su esfuerzo por considerar a la naturaleza como la encarnación de la verdad, buscaba traducir las leyes que la rigen en proporciones

geométricas simples y tomarlas como cánones de diseño universal. Así, logró que toda obra creada por el hombre refleje la naturaleza misma.

Un caso notable es el Modulor de Le Corbusier, una escala áurea doble basada en la altura de un hombre de 1,83 cm, convertida en un sistema de medidas estándar para la construcción.

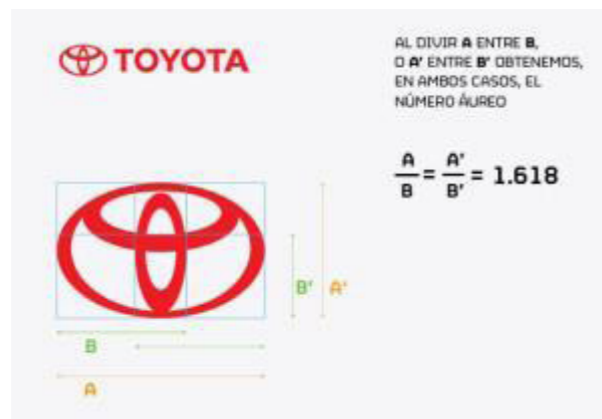
Imagen 1.17  
archdaily.cl



En la actualidad, numerosos artistas y diseñadores de diversas disciplinas utilizan la proporción áurea para estructurar sus obras, ya sea de manera consciente o inconsciente, influenciados por siglos de bagaje cultural. Un ejemplo claro de esto es la presencia de la proporción áurea en una multitud de logotipos ampliamente reconocidos en el mundo contemporáneo.

A continuación, unos ejemplos:

Imagen 1.18  
designals.net



UNIRaf  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
RAFAELA



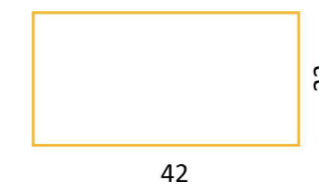
Imagen 1.19  
designals.net



Imagen 1.20  
designal.net

Problema:

Tenemos una lámina de 42cm de ancho y 22 cm de alto. Queremos colocarle un marco de ancho uniforme de modo que el cuadro quede de sección áurea. ¿Cuál es el ancho del marco ?



Operando  
 $42 + 2x = 1,618(22 + 2x)$ ,  
 $42 + 2x = 35,6 + 3,236x$

$42 - 35,6 = 3,236x - 2x$

$6,4 = 1,236x$

$x = \frac{6,4}{1,236} = 5,178 \text{ cm}$

Imagen 1.21  
Elaboración propia

El ancho con el marco será  $42 + 2x$  y el alto  $22 + 2x$

Debe cumplirse  $\frac{42+2x}{22+2x} = 1,618$

El cuadro quedará con 52,35 cm de ancho y 32,356 cm de alto. Su módulo será 1,618.

## Sobre El Formato Papel Y Sus Proporciones

Formato	Lado mayor	Lado menor	Proporción
A0	1189	841	$1189/841 \cong \sqrt{2}$
A1	841	594	$841/594 \cong \sqrt{2}$
A2	594	420	$594/420 \cong \sqrt{2}$
A3	420	297	$420/297 \cong \sqrt{2}$
A4	297	210	$297/210 \cong \sqrt{2}$
A5	210	148	$210/148 \cong \sqrt{2}$
A6	148	105	$148/105 \cong \sqrt{2}$
A7	105	74	$105/74 \cong \sqrt{2}$
A8	74	52	$74/52 \cong \sqrt{2}$
A9	52	37	$52/37 \cong \sqrt{2}$
A10	37	26	$37/26 \cong \sqrt{2}$

El sistema ISO (International Organization for Standardization) deriva del sistema DIN y establece normas para el formato del papel y otros materiales impresos. Esta normativa garantiza que desde sellos de correos hasta carteles de gran formato tengan una relación de aspecto de 1 a la raíz cuadrada de 2 (aproximadamente 1,414), lo que asegura la compati-

bilidad entre diferentes productos como sobres, carpetas, tarjetas y cartulinas.

La norma ISO 216 está basada en la DIN 476 (1922). Es ampliamente utilizada para regular el formato del papel en todo el mundo. Esta norma busca maximizar la eficiencia en el uso del papel.

En la serie A, que es comúnmente utilizada, el formato base es A0, que tiene un metro cuadrado de superficie y una relación entre sus lados igual a la raíz cuadrada de dos. A partir de cortes sucesivos que reducen el tamaño a la mitad, se obtienen los formatos A1, A2, A3, A4, y así sucesivamente. La letra A indica la serie y el número que la acompaña representa la cantidad de cortes realizados para obtener el tamaño específico a partir del A0. Todas las hojas en esta serie son proporcionales, manteniendo constante la relación entre los lados. El siguiente cuadro muestra las dimensiones de los lados en milímetros y la relación entre ellos ( $\sqrt{2}$ ) para cada hoja de la serie A.

El cociente entre el lado mayor (L) y el lado menor (l) de cada una de las hojas es igual a la raíz cuadrada de 2. Cada formato posee la mitad de superficie que la hoja de tamaño inmediato superior, y el lado menor es igual a la mitad del lado mayor del formato inmediato superior.

La serie A, la que utilizamos comúnmente, parte de un formato base A0 que cumple con dos condiciones:

- Posee un metro cuadrado de superficie.
- La relación entre sus lados es igual a raíz cuadrada de dos.



## ESCALA

Cuando se trata de representar objetos a su tamaño real, surgen limitaciones tanto en objetos muy grandes como en aquellos demasiado pequeños. Basta solo imaginarnos el plano de un avión en tamaño real, o buscar dibujar todos los elementos de un chip en escala real. En el primer caso, los formatos serían poco manejables, mientras que en el segundo la definición sería poco clara. La solución a esta problemática es la representación mediante la ESCALA, que implica la ampliación o reducción necesaria para representar de una manera eficiente los objetos en el plano del dibujo.

La Escala se define como la relación matemática entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad en un plano o mapa. Se expresa en forma de razón, donde el numerador indica las medidas en el plano y el denominador, las medidas en la realidad.

$$Escala = \frac{\text{longitud del dibujo}}{\text{longitud real}}$$

Despejando la fórmula obtenemos:

$$\text{Longitud del dibujo} = Escala \times \text{Longitud real}$$

$$\text{Longitud real} = Escala \times \text{Longitud del dibujo}$$

La proporción relativa entre elementos debe ser equilibrada, lo que implica el uso de una escala correcta en la composición.

Esta representación gráfica que se hace, cuidando de conservar exactamente la forma, es necesaria para que el objeto y su representación sean **semejantes**. Por lo general, de distinto tamaño que el objeto real. Como la forma debe conservarse, las relaciones entre las dimensiones reales y las correspondientes a la representación deben ser constantes.

Así, por ejemplo, si a una longitud de 15 m corresponde en la representación una longitud de 5 cm, la escala del plano es:

$$\frac{5 \text{ cm}}{15 \text{ m}} = \frac{5}{1500} = \frac{1}{300}$$

Esto significa que una longitud del dibujo es 300 veces menor que la correspondiente a la longitud real.

### Ejemplos de escalas normalizadas

Fabricación e instalaciones	Escalas de reducción			Escalas de Ampliación
	Construcciones civiles	Topografía	Urbanismo	
1:2,5	1:10	1:100	1:500	2:1
1:5	1:20	1:200	1:1000	5:1
1:10	1:50	1:500	1:2000	10:1
1:20	1:100	1:500	1:5000	
1:50	1:200	1:1000	1:25000	
1:100	1:500	1:2000	1:50000	
1:200	1:1000	1:5000	1:100000	
		1:10000		
Escala Real				1:1

### Ejemplos:

- 1) Calcular la longitud real en metros que corresponde a una distancia de 4.9 cm en un plano cuya escala es de 1/1750.

$$\text{Longitud Real} = 4,9 \times 1750 = 8575 \text{ m}$$

- 2) Calcular la escala de un plano que hace corresponder 190 dm a 5,7 km.

$$\text{Escala} = \frac{190 \text{ dm}}{5,7 \text{ km}} = \frac{19 \text{ m}}{5700 \text{ m}} = \frac{1}{300}, \text{ Escala } 1:300$$

- 3) Un terreno rectangular tiene por dimensiones 300 m de largo y 125 m de ancho. ¿Qué dimensiones tienen en la representación gráfica si se usa una escala 1/1000?

$$\text{Longitud del dibujo} = \text{Escala} \times \text{Longitud real}$$

$$\text{Longitud del dibujo} : \frac{1}{1000} \times 300 = 0,3 \text{ m (30 cm)}$$

La representación gráfica debe ser de 30 cm de largo y 12,5 cm de ancho.

- 4) Mide con la regla e indica a qué escala está dibujada esta llave inglesa que mide 25 cm en la realidad.



### Otros números interesantes para el diseño- Los números metálicos

El oro es ampliamente reconocido como el metal precioso por excelencia y como el máximo representante de la belleza clásica. Sin embargo, a lo largo de la historia se han considerado otros elementos metálicos dignos de una condición importante, aunque en menor medida. Esta percepción se refleja en los premios otorgados en competiciones deportivas u otro tipo de competencias, en los que después de la medalla de oro que distingue al primer clasificado, se otorga la medalla de plata al segundo (del latín vulgar "plattus" y el griego "platys", que significa plano o aplastado, como los platos de este metal utilizados en la antigua Grecia) y la de bronce, al tercero. Del mismo modo, los matemáticos han explorado más allá del famoso número de oro, que define la divina proporción áurea. Han definido también un número de plata que encierra otra forma de perfección geométrica, utilizando un razonamiento análogo al del oro (que es la medida del lado mayor de un rectángulo en el que, al quitar el cuadrado que define el lado menor, resulta un rectángulo semejante). Cuando esta semejanza se produce al quitar dos cuadrados definidos por el lado menor, decimos que el lado largo tiene como medida el número de plata. Además, podríamos seguir quitando más cuadrados, lo que daría lugar a toda una colección de números metálicos.

Presentemos entonces la nueva familia de "números metálicos". Estos números comparten, entre otras características, el hecho de llevar el nombre de un metal. Por ejemplo, el más conocido es el famoso "Número de Oro", seguido por el "Número de Plata", el "Número de Bronce", el "Número de Cobre", el "Número de Níquel", y muchos otros más. El "Número de Oro" ha sido ampliamente utilizado en una variedad de culturas antiguas como base de proporciones.

El Número de Plata, por ejemplo, se utiliza para describir y explicar el sistema romano de proporciones, haciendo uso de una propiedad matemática que, como veremos, es común a todos los miembros de esta notable familia.

En conclusión, los números metálicos aparecen desde los sistemas utilizados en el diseño de construcciones por la civilización romana antigua hasta los más recientes trabajos de caracterización de caminos universales al caos. Esto los convierte en instrumentos invaluable para la búsqueda de relaciones cuantitativas viables entre la Matemática y el Arte.

La familia de los números metálicos, introducida por la matemática



Imagen 1.22  
Elaboración propia

Argentina, Vera de Spinadel, en 1994, está formada por las raíces positivas de ecuaciones de la forma  $x^2 = px + q$ , o su equivalente  $x^2 - px - q = 0$ , donde  $p$  y  $q$  son números enteros positivos.

**PROPIEDAD No. 1 DE LA FAMILIA DE NÚMEROS METÁLICOS:** son todos irracionales cuadráticos.

Son solución (positiva) de la ecuación cuadrática  $x^2 - px - q = 0$

Vamos a considerar  $q=1$ , por lo tanto, la ecuación que genera números metálicos la reducimos a  $x^2 - px - 1 = 0$

El número de oro ( $p=1$ )

Algebraicamente, el número de oro es la raíz positiva de la ecuación  $x^2 - x - 1 = 0$ .

Planteando la fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ nos queda } x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

, consideramos la solución positiva.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Generalizando, podemos plantear la ecuación  $x^2 - px - 1 = 0$ , donde  $m$  es un número natural.

Las raíces positivas de estas ecuaciones son los números metálicos:

Si  $p=1$ , obtenemos el número de oro.

Si  $p=2$ , obtenemos:  $x^2 - 2x - 1 = 0$ .

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}, \text{ el número de plata.}$$

Si  $p=3$ , obtenemos:  $x^2 - 3x - 1 = 0$ .

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-1)(-1)}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \text{ el número de bronce.}$$

En general, se obtiene la expresión  $\frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}$ ,  $p$  genera todos los números metálicos.

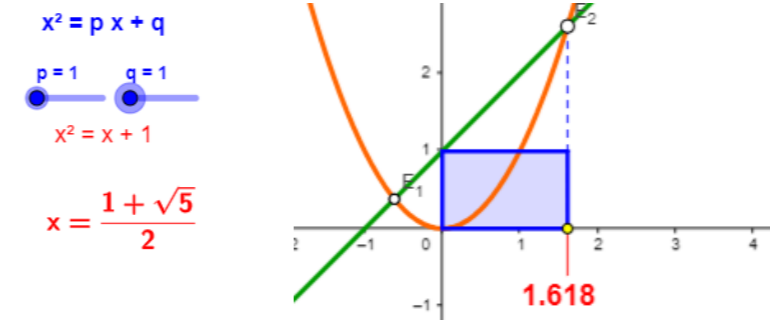
### Valor aproximado de los Números Metálicos

Nombre	p	q	Valor
Oro	1	1	1,618033989...
Plata	2	1	2,414213562...
Bronce	3	1	3,302775638...
Cobre	1	2	2,000000000...
Níquel	1	3	2,302775638...
Platino	2	2	2,732050808...

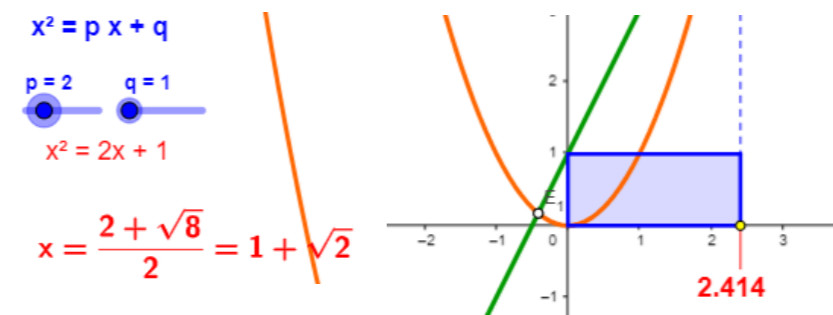
### Rectángulos con secciones metálicas (los módulos son números metálicos)

(Obtenidos con geogebra considerando  $q=1$ )

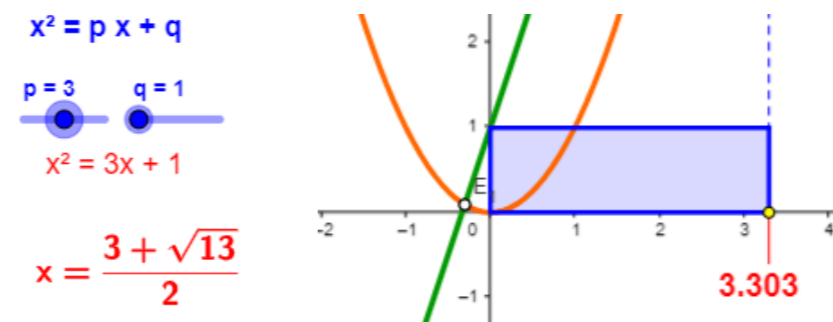
#### 1- Sección Áurea



#### 2- Sección con el número de Plata



#### 3- Sección con el número de Bronce

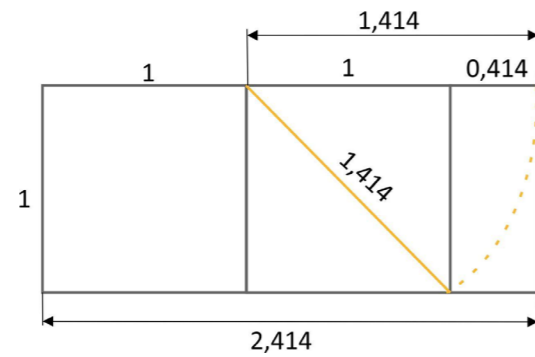


### Construcción de rectángulos con secciones metálicas

Rectángulo de Plata: tiene módulo  $\theta = 1 + \sqrt{2}$

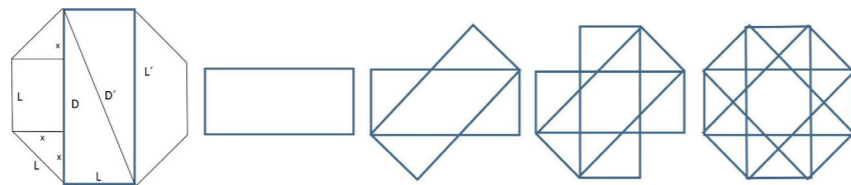
Este rectángulo está formado por la unión de un cuadrado y de un rectángulo dinámico de módulo  $\sqrt{2}$ .

Imagen 1.23  
Elaboración propia



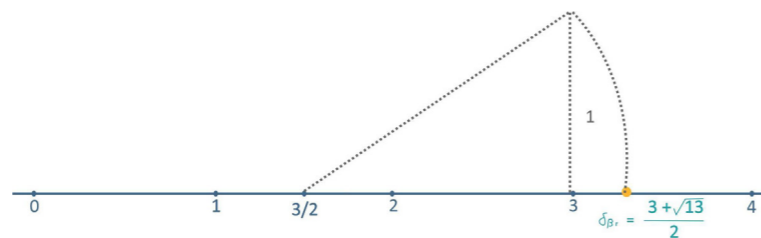
Está relacionado con el octógono regular (figura habitual en la arquitectura romana y árabe, de donde pasó a las catedrales medievales y al arte gótico, presente también en símbolos como el cuadrado de corte sagrado y la cruz de los templarios), ya que puede formarse un rectángulo de plata con el lado del octógono y una de sus diagonales.

Imagen 1.24  
Elaboración propia



Rectángulo de Bronce : Tiene módulo  $\theta = \frac{3 + \sqrt{13}}{3}$

Imagen 1.25  
Elaboración propia



Partiendo de un rectángulo cuya base es el triple de su altura, el rectángulo de bronce:

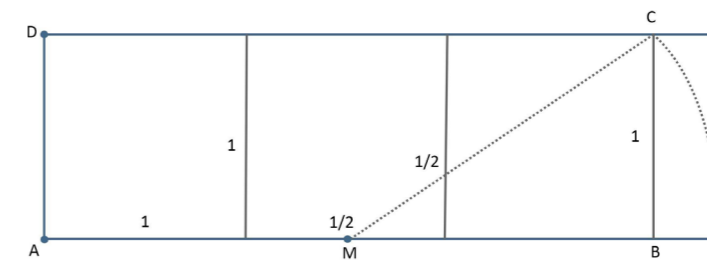


Imagen 1.26  
Elaboración propia

### La sucesión de Fibonacci y el número de oro

La sucesión comienza con los números 1 y 1, y a partir de estos, cada elemento es la suma de los dos anteriores.

A los elementos de esta sucesión se les llama números de Fibonacci. Esta sucesión fue descrita en Europa por Leonardo de Pisa, matemático italiano del siglo XIII, también conocido como Fibonacci.

Tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemática, teoría de juego, aunque no lo sepamos o lo hagamos de manera inconsciente en gran parte de los diseños, ya sea de objetos o imágenes. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa.

Los primeros términos de la sucesión son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

$$\text{El término } F(n + 2) = F(n + 1) + F(n)$$

Si hacemos el cociente entre dos números consecutivos de la sucesión, por ejemplo,  $\frac{144}{89} = 1,617977 \dots$

Cuanto mayor sea el número correspondiente a la sucesión de Fibonacci, al dividir con el anterior, este cociente se aproxima más y más al número de oro.

Probamos ahora con los dos últimos números de la sucesión:

$$\frac{1597}{987} = 1,61803 \dots$$

De esta manera, nos vamos acercando más y más al número de oro, a partir de los números que se generan en la sucesión de Fibonacci.



Decimos en el infinito  $\frac{F(n+1)}{F(n)} = \phi$

### Representación gráfica de la Serie de Fibonacci

Imagen 1.27  
Elaboración propia

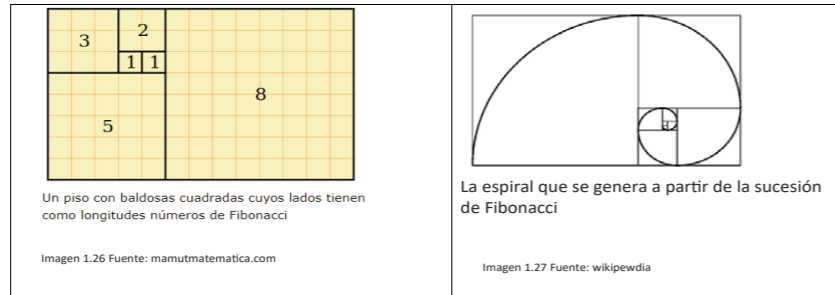


Imagen 1.28  
Elaboración propia

Imagen 1.29  
Elaboración propia

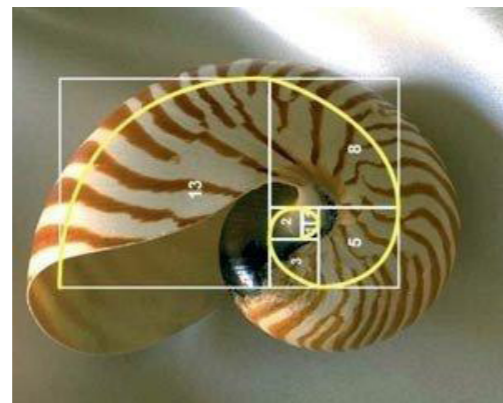


Imagen 1.30  
mamutmaticas.com



Los siguientes platos de autor desconocido fueron contruidos, inspirados en la sucesión de Fibonacci.

Por ejemplo, supongamos que el plato en el centro es de 21 cm por 21 cm. El cuadrado blanco en su interior, entonces, debe ser de de 13 cm × 13 cm; el cuadrado azul podría ser de 8 cm × 8 cm; el negro de 5 cm × 5 cm, y así sucesivamente.

Además, esta forma de espirales podemos encontrarlas en numerosas variedades de animales, flores y plantas, que se ajustan a parejas con términos de esta sucesión.

## FRACTALES

¿Qué es un fractal?

Un fractal es una figura geométrica cuya principal característica consiste en presentar una estructura que se repite en diferentes escalas, tratándose así de un patrón infinito. Esto significa que, cuando se observa un fractal a diferentes niveles de magnificación, se puede encontrar una repetición de patrones similares o idénticos a los observados en niveles de detalle más amplios o más pequeños. Los fractales son formas que no pueden describirse completamente mediante las formas geométricas tradicionales, como círculos o triángulos.

Los fractales pueden generarse mediante procesos matemáticos repetitivos, como la iteración o la recursividad. Estos procesos permiten crear estructuras complejas a partir de reglas relativamente simples. Los fractales se encuentran en la naturaleza en formas como los copos de nieve, las líneas costeras, las estructuras de las plantas y muchos otros fenómenos naturales.

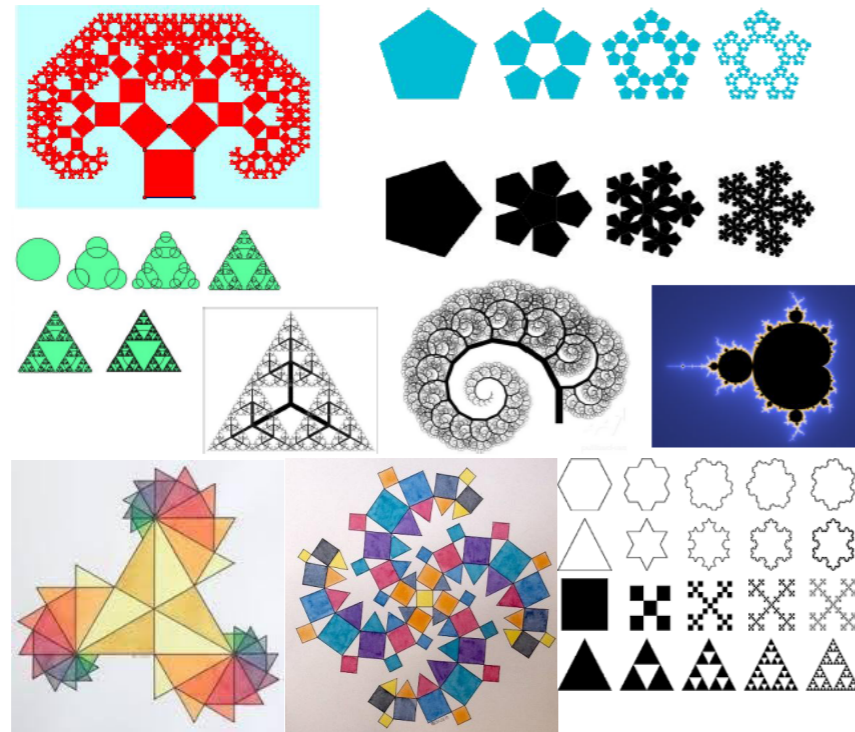
El nombre fue propuesto por Benoît Mandelbrot (1975) y proviene del latín fractus, cuyo significado en español podría traducirse como quebrado o fracturado.

El descubrimiento y la matematización de esta geometría (mediados del siglo XX) ha permitido explorar matemáticamente las irregularidades de la naturaleza en muchas de sus formas.

Imagen 1.31  
elconfidencial.com



Ejemplos de fractales

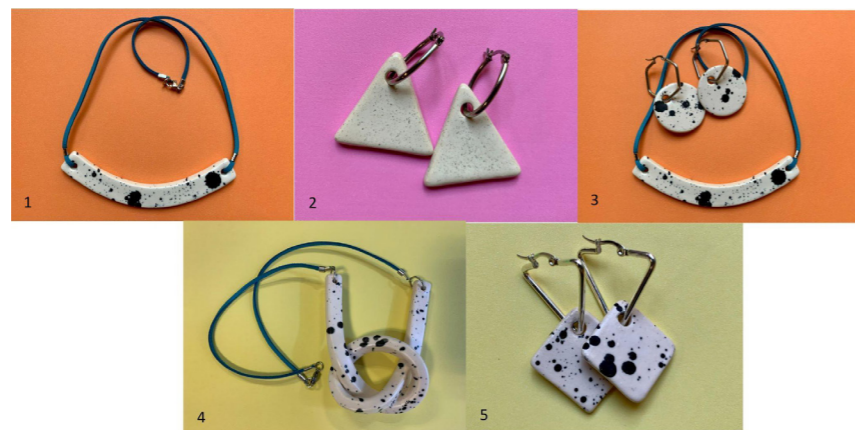


Guía de Ejercicios Nro 1 - Unidad I - Razones-Proporciones

Ejercicio 1

Es necesario elaborar una serie de contenedores para las piezas de joyería en cerámica diseñadas por la diseñadora Carolina Zelone y su marca SIC. Estos contenedores van a ser todos de una altura de 4cm, pero van a variar sus superficies de acuerdo a la pieza a contener.

Imagen 1.32  
Carolina Zelone



UNRaf  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
RAFAELA



- 1- Collar parábola
- 2- Aros triángulo
- 3- Conjunto
- 4- Collar Nudo
- 5- Aros Rombo

Se te pide completar la siguiente tabla relativa al módulo y la superficie de diferentes rectángulos que van a conformar los contenedores. Medidas en cm.

Rectángulo	Lado mayor	Lado menor	Módulo	Superficie
Collar parábola	23	12		
Aros triángulo	12		1,833	
Conjunto		5	$\sqrt{2}$ .	
Collar nudo			2	72
Aros rombo			$\phi$	25,888

Ejercicio 2

Si tengo dos rectángulos que poseen el mismo módulo ( $M = 1,5$ ) y que la suma de sus superficies es igual a  $3045 \text{ cm}^2$ . Si el lado menor del rectángulo menor es igual a 4 m, ¿cuál es el valor del resto de los lados de los rectángulos?

Ejercicio 3

Fueron diseñadas por Lucía Martínez, Darío Mercuri y Pablo Bianchi. Estas composteras fueron especialmente pensadas para compostar en espacios reducidos, como balcones de los edificios o demás espacios urbanos. La premisa fue que cada usuario logre reducir un 40% de los residuos que genera. Están fabricadas en polipropileno, un plástico reciclable y su tapa es de plástico reciclado también.

Imagen 1.33  
Pablo Bianchi

Imagen 1.34  
Pablo Bianchi



Se desea conocer:

- Las dimensiones de los rectángulos laterales, (imagínenos que estos trapecios están enmarcados dentro de rectángulos laterales) sabiendo que sus módulos son 1,833 y 1,3333, respectivamente, que el lado mayor del rectángulo lateral mayor es igual a 55 cm y que ambos comparten el mismo lado menor.
- Si los módulos de los rectángulos corresponden a rectángulos dinámicos o estáticos.
- El módulo de su tapa, sabiendo que mide 54cm-40cm

#### Ejercicio 4

La estación de audio diseñada por Marco Sanguinetti para la disquería Zivals, en el año 2002. Esta estación estaba pensada para que se pudieran escuchar los discos de determinados artistas antes de comprarlos en el local.

Imagen 1.35  
Marco Sanguinetti



Suponiendo que la parte de la pantalla tenga 17 cm por 10,5cm (R1), mientras que el rectángulo que hace de marco metálico tiene 21 cm por 16 cm(R2).

Se pide:

- Calcular el módulo de ambos rectángulos (R1 y R2).
- Si del rectángulo menor (R2) se mantiene la longitud de su lado mayor: ¿cuánto debe medir su lado menor para que ambos rectángulos sean proporcionales?

#### Ejercicio 5



Imagen 1.36  
merlinahome.com.ar

El siguiente canasto está fabricado en palma de Caranday, un tejido propio de las provincias de Salta, Tucumán, Santiago del Estero, San Luis, Córdoba, Santa Fe y Entre Ríos. Este canasto en particular tiene 38 cm de ancho por 23 de largo y 27 de alto.

Se te pide calcular los módulos (M1) ancho por largo, (M2) alto por largo y (M3)alto por ancho.

#### Ejercicio 6

Si de un rectángulo conocemos el valor de la diagonal que es igual a 22,6715 y su superficie que es igual a 255, se te pide determinar el valor de los lados de ese rectángulo.

#### Ejercicio 7

La imagen corresponde al Armario Escondedor (2007) diseñado por el diseñador industrial Alejandro Sarmiento. Este tiene una estructura de hierro soldado y elásticos de distintos anchos que envuelven compartimentos de distintos tamaños.



Imagen 1.37  
Malba

En la figura, las medidas del armario son: 140 cm de largo por 50 cm de alto y 40 cm de profundidad.

¿Cuál es la altura de las patas si el módulo del rectángulo frontal cuando se incluyen las patas es de 1,85?



¿Cuántos metros de cinta es necesario para la fabricación, si sabemos que la cinta tiene un ancho de 4cm?

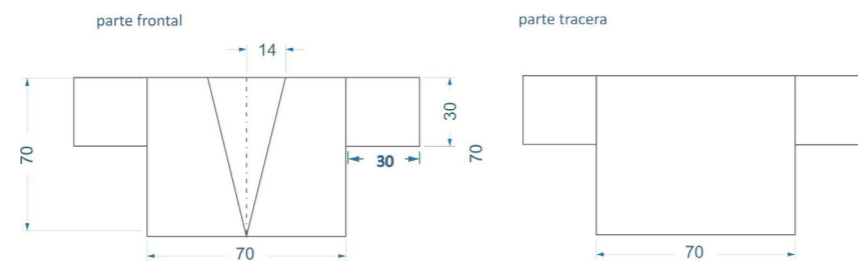
### Ejercicio 8

Se quiere fabricar una serie de cuadernos inspirados en los números metálicos de plata, cobre y níquel, respectivamente. Dar las dimensiones de cada uno de ellos sabiendo que como materia prima se van a utilizar hojas A4 (210\*297mm).

### Ejercicio 9

Los kimonos son una prenda tradicional de la cultura japonesa. Si bien tienen su origen en la cultura China, estos fueron importados a Japón y de ahí se popularizaron al mundo entero. Si bien existen diferentes variantes de esta prenda, en Occidente se utiliza una de las versiones más primitivas que se caracteriza por la simpleza de sus patrones y su facilidad para coserlo.

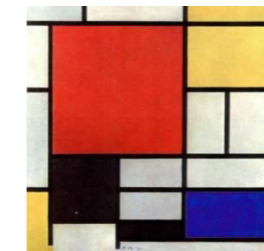
A continuación, copiamos un patrón de una versión de kimono simple:



Se te pide:

- Calcular el módulo de la pieza de tela que se debe tener para realizar la parte frontal.
- Calcular el largo que debe tener el kimono para que su módulo sea igual a 1,5, conservando el ancho.
- Calcular el módulo del triángulo que conforma la solapa en la parte frontal.
- ¿Qué dimensiones debería tener el kimono si se quiere realizar en 3 metros cuadrados de tela conservando el mismo módulo?

### Ejercicio 10

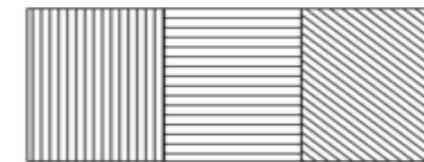


La figura en rojo es un cuadrado de 144 cm<sup>2</sup> de superficie.

La base del rectángulo azul mide lo mismo que el lado del cuadrado y el módulo de este rectángulo es 2,4 cm. Hallar la altura del rectángulo azul.

### Ejercicio 11

Un productor agropecuario quiere encerrar un potrero de forma rectangular y dividirlo en tres potreros consecutivos iguales. Si el módulo del rectángulo es 5 y se requieren en total 1320 m de alambre para el cercado, ¿cuáles son las dimensiones del campo?



### Ejercicio 12

El perímetro de un rectángulo es de 50 m y el módulo del rectángulo es  $\frac{3}{2}$ , siendo la base mayor que la altura. Hallar las dimensiones del rectángulo.

Imagen 1.38  
Elaboración propia





## Bibliografía

- Matemática para Diseño Industrial: guía teórico práctica / Pablo Almada...[et al.]; - 1ª edición para el alumno - Córdoba: Editorial de la Facultad de Arquitectura, Urbanismo y Diseño de la Universidad Nacional de Córdoba, 2021. Libro digital, PDF Archivo Digital: descarga y online ISBN 978-987-4415-99-8 1.
- Guía de Aprendizaje N° 2 RAZONES Y PROPORCIONES. Educación Matemática Primer nivel o ciclo de Educación Media Educación para Personas Jóvenes y Adultas. Ministerio de Educación -Gobierno de Chile
- Bressan, A. M., Bogisic, B. y Crego, K. (2000). Razones para enseñar Geometría en la Educación Básica-Buenos Aires, Novedades Educativas. (Disponible en internet).
- Bressan, A. M. y Bogisic, B. (1996). La estimación. Una forma importante de pensar en matemática. Desarrollo Curricular, Consejo Provincial de Educación de Río Negro. (También disponible en Internet). De Spinadel, V. (1). La familia de números metálicos. Cuadernos Del CIMBAGE, (6). Recuperado a partir de <https://ojs.econ.uba.ar/index.php/CIMBAGE/article/view/317>
- Livio, Mario. The Golden Ratio. Broadway Books. ISBN 0-7679-0816-3. N. N.
- Vorobiov (traducción de Carlos vega 1974). Números de Fibonacci. Editorial Mir, Moscú.
- Cook, Theodore Andrea. The Curves of Live. Nueva York. ISBN 0-486-23701-X Ghyka, Matila (1992).
- Pacioli, Luca (1991).El Número de Oro. Barcelona: Poseidón, S.L.. ISBN 978-84- 85083-11-4.
- Bogomolny, A. "Golden Ratio in Geometry." [http://www.cut-the-knot.org/do\\_you\\_know/GoldenRatio.shtml](http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml). Brown, D. The Da Vinci Code. New York:
- Doubleday (2003). Coxeter, H. S. M. "The Golden Section, Phyllo-taxis, and Wythoff's Game."
- Gardner, Martin. "Phi: The Golden Ratio." Knott, R. "Fibonacci Numbers and the Golden Section."
- <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/>. Livio,

M. The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. New York: Broadway Books, 2002.

- <http://goldennumber.net/body.htm> [http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_%C3%A1ureo](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo)
- <http://www.disfrutalasmaticas.com/numeros/fibonacci-sucesion.html>
- <http://www.ite.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/secundaria/maticas/p hi/>
- [https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/fractales-patrones-que-se-encuentran-naturaleza\\_20807](https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/fractales-patrones-que-se-encuentran-naturaleza_20807)
- Mandelbrot, Benoit (1987). Los objetos fractales. Editorial Tusquets, Colección superinfimos. ISBN 8472234584 ISBN13 9788472234581 N° edición 1.

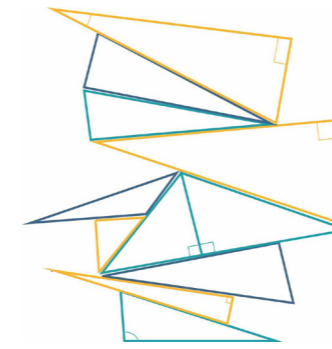
UNIRaf  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
RAFAELA



# 02.

## Trigonometría

### TRIGONOMETRÍA: DEFINICIÓN



La trigonometría se ocupa, principalmente, de estudiar la relación entre lados y ángulos de un triángulo. Surgió a razón de las necesidades de la astronomía, la cartografía (el estudio de mapas), la artillería, entre otras. La trigonometría, que necesitó para su desarrollo de elementos de aritmética (para la configuración de tablas), álgebra (para establecer fórmulas que relacionan ángulos y lados de un triángulo) y geometría, tuvo un florecimiento mucho más tardío que la geometría.

Figura 01

### ÁNGULOS

Quizás la forma más sencilla de definir un ángulo sea como un atributo asociado a figura geométrica determinada por dos planos o dos rectas que se cortan entre sí, tal como se ve en la figura 2:



Figura 02

Sin embargo, esta manera de definirlo puede ser discutida. Nos quedamos con la definición de que un ángulo es la medida de la rotación de una semirrecta que pivotea alrededor de un punto de la misma (figura 3):

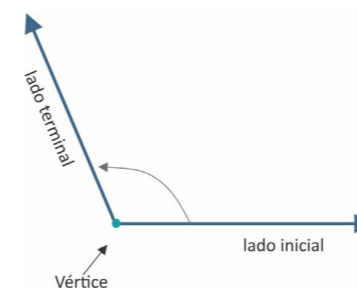


Figura 03

A la hora de definir cómo medir la magnitud de los ángulos, es importante definir primero el signo.

Por convención, se definen los ángulos positivos medidos en sentido anti-horario y negativos en sentido horario, como se muestra en la figura 4:

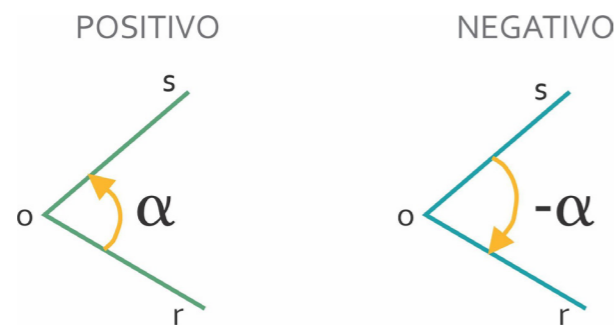


Figura 04

### ÁNGULOS ORIENTADOS EN UN SISTEMA CARTESIANO

Precisemos cómo consideramos a un ángulo en un sistema de coordenadas cartesianas:

Su vértice es el origen de coordenadas.

Está generado por la rotación de una semirrecta o rayo con origen en (0;0). El rayo parte desde una posición inicial coincidente con el semieje positivo de las x -este será su lado inicial- y gira manteniendo fijo su origen hasta llegar a una posición que marca su lado terminal. Además, puede realizar más de un giro completo (figura 5):

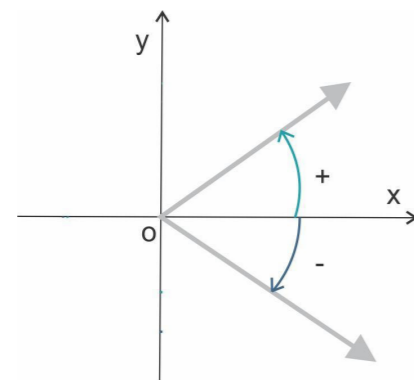


Figura 05

Es positivo cuando está generado en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y negativo cuando está generado en el sentido horario.

Para referirnos a su ubicación, consideramos el plano cartesiano dividido en cuatro sectores, llamados cuadrantes, y localizamos el lado terminal.



### MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Existen varios sistemas de medición de ángulos. Entre ellos, los más usados son el sistema sexagesimal y el sistema circular o radián.

#### Sistema sexagesimal:

La unidad de medida es el grado, que corresponde a la 360ava parte de la circunferencia. A su vez, cada grado sexagesimal se divide en 60 partes iguales llamadas minutos, y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas segundos. Así, si un ángulo mide  $34^{\circ}14'23''$  leemos: 34 grados, 14 minutos, 23 segundos.

El número 60 tiene la ventaja de tener muchos divisores como: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60), con lo que se facilita el cálculo con fracciones. Nótese que 60 es el número más pequeño que es divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6 (figuras 6 y 7).

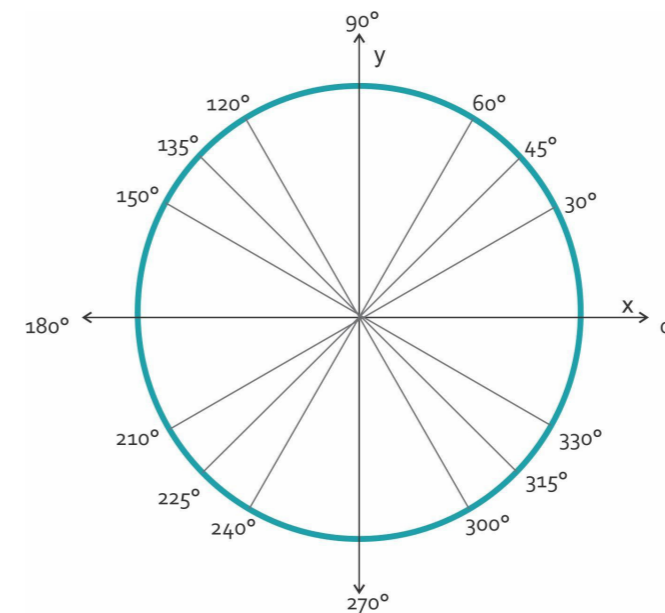


Figura 06

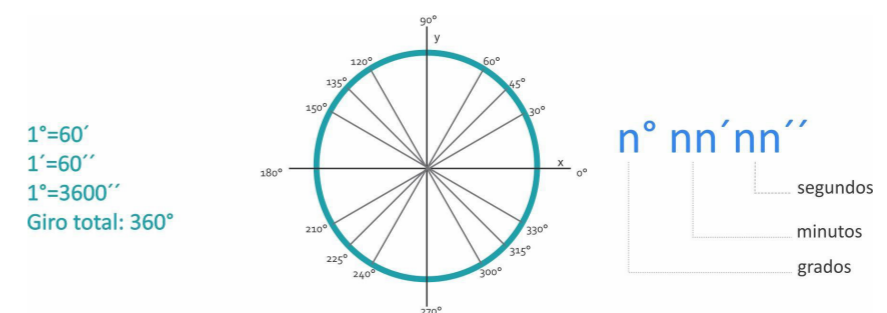


Figura 07

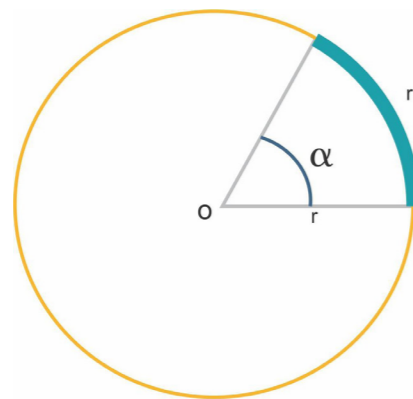
Por lo tanto:

- Un ángulo central tiene 360°.
- Un ángulo llano tiene 180°.
- Un ángulo recto tiene 90°.
- Un ángulo obtuso tiene entre 90 y 180 grados.
- Un ángulo agudo tiene entre 0 y 90 grados.
- Llamamos ángulos complementarios a los que suman 90° y ángulos suplementarios a los que suman 180°.

### Sistema radián o circular:

El sistema radial es quizás el menos intuitivo (o al menos, el que más cuesta incorporar) y, al mismo tiempo, el más natural. El sistema radial es inherente a la naturaleza del círculo. El pilar de este sistema es su unidad, el radian. El radian mide el ángulo presentado como central a una circunferencia y su medida es igual a la razón entre la longitud del arco que comprende dicha circunferencia y la longitud del radio, es decir, mide la cantidad de veces que la longitud del radio cabe en dicho arco. Su símbolo es rad (figura 8).

Figura 08



Se llama radián al ángulo que teniendo su vértice en el centro de un círculo, corta en su circunferencia un arco de longitud igual al radio. Si sabemos que una circunferencia completa tiene 360° y su longitud es  $2 \cdot \pi \cdot r$ , podemos ver que:

$$\frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ (radianes)}$$

Se puede observar en la gráfica, que la medida aproximada de un radián equivale aproximadamente a 57° 17' 45'' (α). De esta manera, podemos obtener la medida en radianes de un ángulo de α grados:

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{\alpha}{x} \Rightarrow x = \frac{2\pi \alpha}{360} \text{ (radianes)}$$

Así, por una simple regla de tres simple, podremos convertir grados sexagesimales a radianes y viceversa.

Veamos estos ejemplos:

#### Ejemplo 1 :

Convertir 90 a radianes.

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{90}{x} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 90}{360} = \frac{\pi}{2} \text{ (radianes)}$$

#### Ejemplo 2 :

Convertir 1,5 π radianes a grados sexagesimales:

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{\alpha}{1,5} \Rightarrow \alpha = \frac{360 \cdot 1,5\pi}{2\pi} = 270^\circ$$

Equivalencia entre el sistema sexagesimal y radial

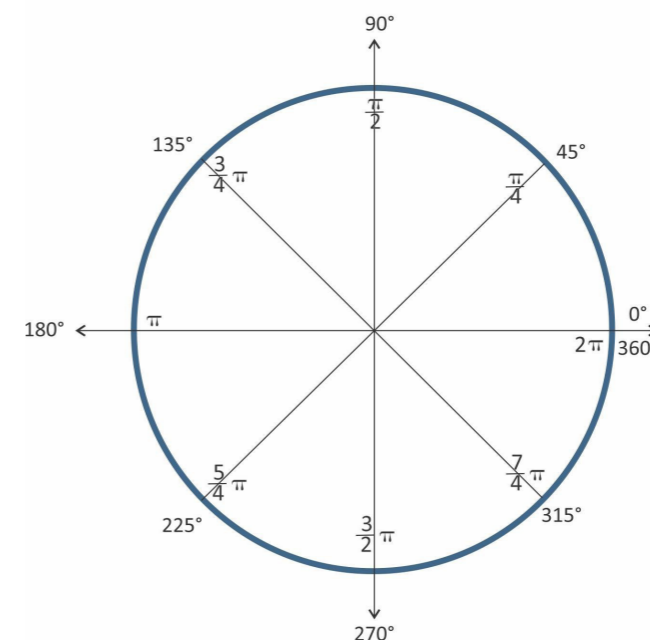


Figura 09



### Algunas nomenclaturas:

Los ángulos reciben distintos nombres que los caracterizan, en función del ángulo abarcado. Es importante manejar esta nomenclatura.

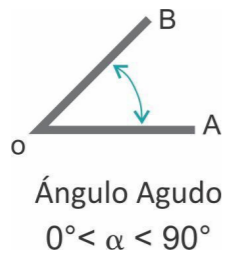
Cuadro 1: Tabla de equivalencia entre los sistemas de medición de ángulos

Ángulo	Sistema Sexagesimal	Sistema centesimal (poco usado)	Sistema radián
Recto	90°	100 <sup>g</sup>	$\frac{\pi}{2}$ (rad)
Llano	180°	200 <sup>g</sup>	$\pi$ (rad)
¾ Giro	279°	300 <sup>g</sup>	$\frac{3\pi}{2}$ (rad)
1 Giro	360°	400 <sup>g</sup>	$2\pi$ (rad)

#### Nomenclatura de algunos ángulos

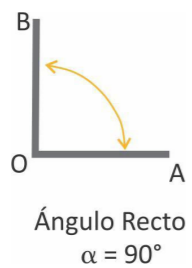
Ángulos agudos: son todos aquellos ángulos cuya magnitud es menor a 90° grados (figura 10).

Figura 10



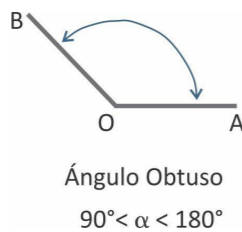
Ángulos rectos: son los ángulos cuya magnitud es igual a 90° grados (figura 11).

Figura 11



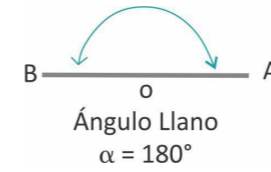
Ángulos obtusos: son aquellos cuya magnitud se encuentra entre los 90° y los 180° grados (figura 12).

Figura 12



Ángulos llanos: son los ángulos cuya magnitud es de 180° grados (figura 13).

Figura 13



Ángulos completos: son los ángulos representados por un giro completo, es decir, 360° grados, (figura 14).

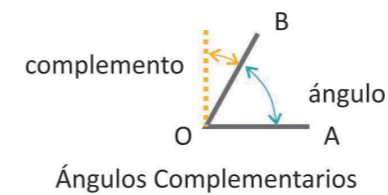
Figura 14



También existe una nomenclatura para describir la interacción de dos ángulos.

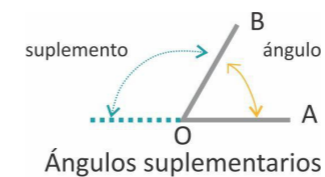
Ángulos complementarios: son aquellos cuya suma representa 90 grados (figura 15).

Figura 15



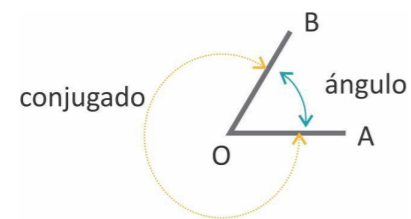
Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios si su suma es igual a 180 grados (figura 16):

Figura 16



**Ángulos conjugados:** son los ángulos cuya suma es igual a 360 grados. Es importante notar que dos ángulos conjugados representan el mismo ángulo, solo que con signo opuesto (figura 17):

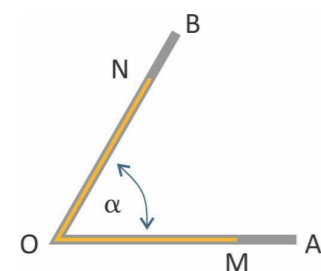
Figura 17



Ángulos Conjugados

**Ángulos congruentes:** dos ángulos son congruentes cuando se encuentran superpuestos compartiendo los mismos lados (figura 18):

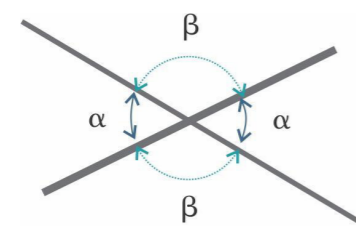
Figura 18



Ángulos Congruentes

**Ángulos opuestos por el vértice:** son los dos ángulos iguales producto de la prolongación de los lados al llegar al vértice (cruce de dos rectas) (figura 19):

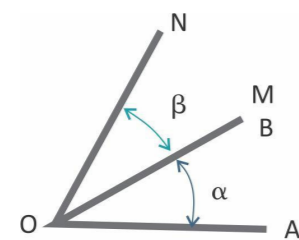
Figura 19



Opuestos por el vértice

**Ángulos adyacentes:** dos ángulos son adyacentes cuando comparten un lado en común (figura 20):

Figura 20



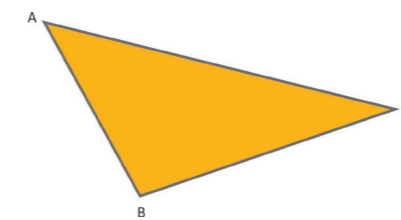
Ángulos Adyacentes

## TRIÁNGULOS

Como lo expresamos en la definición de trigonometría, trabajaremos en este capítulo fundamentalmente con triángulos. Por lo tanto, diremos que un triángulo es un polígono de tres lados (se sobreentiende que se trata de un triángulo cerrado).

Vemos en el triángulo **ABC** (figura 21):

Figura 21



Los puntos **A**, **B** y **C** se llaman vértices.

Los segmentos **AB**, **BC** y **CA** se llaman lados (también los podemos llamar *a*, *b* y *c*, de acuerdo a que estén opuestos a los vértices *A*, *B* y *C*, respectivamente).

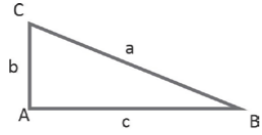
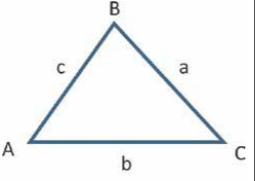
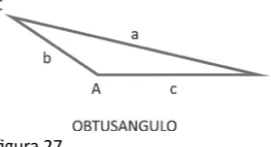
Los ángulos **ABC**, **BCA** y **CAB** se llaman ángulos interiores (la letra que se escribe en el medio de las tres que forman parte del nombre del ángulo, es la que corresponde al vértice del mismo). Pueden designarse también **A**, **B** y **C**, de acuerdo al vértice.

Los triángulos, de acuerdo a sus **ángulos**, se pueden clasificar en **acutángulos** (cuando los tres ángulos son agudos), **rectángulos** (cuando un ángulo es recto) y **obtusángulos** (cuando un ángulo es obtuso). Particularmente, en el triángulo rectángulo el lado mayor (que es el que se opone al ángulo recto) se llama **hipotenusa**. Los demás lados (que se oponen a los ángulos agudos) se llaman **catetos**.

*Clasificación de los triángulos según la medida de sus lados:*

Triángulo equilátero	Triángulo isósceles	Triángulo Escaleno
Los 3 lados ( <i>a</i> , <i>b</i> y <i>c</i> ) son iguales. Los 3 ángulos interiores son iguales (figura 22)	Tienen 2 lados iguales ( <i>a</i> y <i>b</i> ) y un lado distinto. Los ángulos <i>A</i> y <i>B</i> son iguales, y el otro agudo es distinto (figura 23).	Los 3 lados son distintos. Los 3 ángulos son también distintos (figura 24).
 EQUILATERO figura 22	 ISOSCELES figura 23	 ESCALENO figura 24

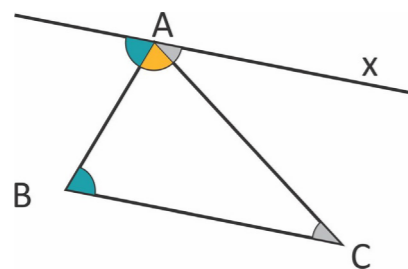
Según la medida de sus ángulos:

Triángulo Rectángulo	Triángulo acutángulo	Triángulo obtusángulo
<p>El ángulo interior A es recto (90 grados) y los otros 2 ángulos son agudos. Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos (c y b), el otro lado hipotenusa (figura 25):</p>  <p>RECTÁNGULO figura 25</p>	<p>Tienen los 3 ángulos agudos (menos de 90 grados) (figura 26):</p>  <p>ACUTANGULO figura 26</p>	<p>El ángulo interior A es obtuso (más de 90 grados). Los otros 2 ángulos son agudos (figura 27):</p>  <p>OBTUSANGULO figura 27</p>

Propiedades de los triángulos

- 1 -Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- 2 -La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a  $180^\circ$ .

Visualización de la propiedad, en la figura 28:

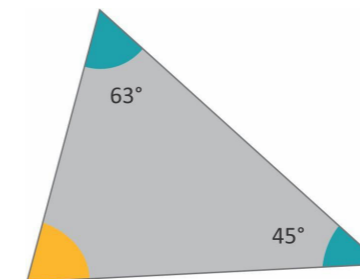


- 3 -El valor de un ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

Ejemplo

¿Cuál es la medida del ángulo faltante en el siguiente triángulo escaleno?(figura 29).

Figura 29



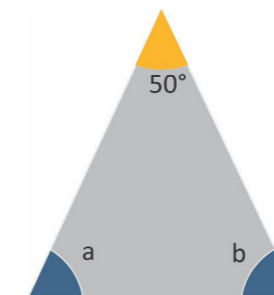
Un triángulo escaleno tiene tres ángulos con medidas diferentes. Entonces, encontramos la medida del tercer ángulo al sumar los ángulos conocidos y restar de  $180^\circ$ :  $63^\circ + 45^\circ = 108^\circ$

$$\Rightarrow 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ \quad \text{El ángulo faltante mide } 72^\circ.$$

Ejemplo

Encuentra las medidas de los ángulos faltantes en el siguiente triángulo isósceles (figura 30).

Figura 30



Solución:

En este caso, tenemos la medida del ángulo que es diferente a los otros dos. Entonces, tenemos que restarlo de  $180^\circ$  para encontrar la suma de los dos ángulos iguales:

$$180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

$130^\circ$  representa a la suma de los dos ángulos. Dado que estos ángulos son iguales, simplemente dividimos por 2 para encontrar la medida de cada uno:

$$130^\circ \div 2 = 65^\circ$$

La medida de los ángulos a y b es  $65^\circ$ .



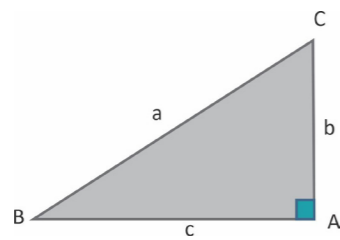
## El Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es una ecuación o fórmula que nos permite relacionar a los tres lados de un triángulo rectángulo. En geometría, el teorema de Pitágoras es principalmente usado para determinar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de los catetos. Esta propiedad se conoce como Teorema de Pitágoras.

Recordemos que la hipotenusa es el lado del triángulo opuesto al ángulo recto (90°) y los catetos son los otros dos lados del triángulo. Vamos a usar al siguiente triángulo para ilustrar esto (figura 31):

Figura 31



En este triángulo, la fórmula del teorema de Pitágoras es:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

en donde, a y b son las longitudes de los catetos del triángulo y c es la longitud de la hipotenusa.

Podemos usar el teorema de Pitágoras cuando queremos resolver alguna de las siguientes situaciones:

- Conocemos las longitudes de los dos catetos y queremos encontrar la longitud de la hipotenusa.
- Conocemos la longitud de la hipotenusa y la longitud de un cateto y queremos encontrar la longitud del otro cateto.

### Ejemplos

a) Encontrar la longitud de X en el siguiente triángulo (figura 32).

UNRaf  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
RAFAELA

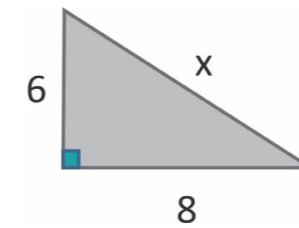


Figura 32

La longitud de X corresponde a la hipotenusa del triángulo. Además, tenemos las siguientes longitudes:

- a=6 b=8

Usamos el teorema de Pitágoras con estos valores y tenemos:

$$6^2 + 8^2 = x^2$$

$$36 + 64 = 100 = x^2$$

$$x = \sqrt{100}$$

$$x = 10$$

b) Encontrar la longitud de y en el siguiente triángulo (figura 33).

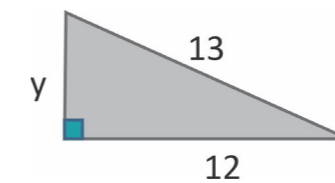


Figura 33

La longitud de y corresponde a un cateto del triángulo. Además, tenemos las siguientes longitudes:

- a=12 c=13

Usamos el teorema de Pitágoras con estos valores y tenemos:

$$12^2 + y^2 = 13^2$$

$$y^2 = 13^2 - 12^2$$

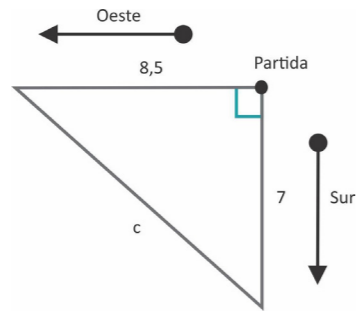
$$y = \sqrt{25}$$

$$y = 5$$

c) Dos ciclistas salen a dar un paseo al mismo tiempo, uno va hacia el sur y el otro hacia el oeste. Después de media hora, el ciclista que fue hacia el sur ha viajado 7 kilómetros y el ciclista que fue hacia el oeste ha viajado 8.5 kilómetros.

Figura 34

En ese momento, ¿cuál es la distancia más corta entre ambos? Vamos a graficar un diagrama para facilitar la resolución de este problema (figura 34).



Las direcciones sur y oeste forman un ángulo recto, y la distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Esto significa que la distancia que queremos encontrar es igual a la hipotenusa del triángulo formado. Entonces, usamos el teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 7^2 + 8,5^2$$

$$c^2 = 49 + 72,25 = 121,25$$

$$c = \sqrt{121,25} = 11,01$$

La distancia más corta entre ambos es 11.01 kilómetros.

### Teorema de Pitágoras en 3D

El teorema de Pitágoras 3D es una extensión del teorema de Pitágoras 2D, que se puede utilizar para resolver problemas en tres dimensiones, como cubos y pirámides rectangulares. En tres dimensiones, la fórmula general del teorema de Pitágoras en 3D es:

$h^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , donde x, y, z son las longitudes correspondientes de las tres dimensiones (figura 35).

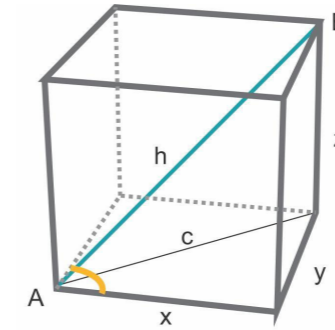


Figura 35

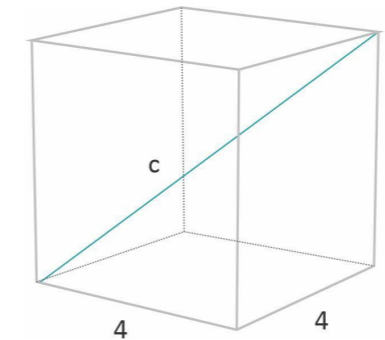
$$h^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Podemos resolver diferentes situaciones del teorema de Pitágoras en 3D utilizando la fórmula que se muestra arriba. Hay una solución completa para cada uno de los siguientes ejemplos.

### Ejemplo

Encuentra la longitud de c en el cubo. Primero, tenemos que identificar los tres lados y cada longitud correspondiente del cubo. En este caso, las tres longitudes son iguales a 4 unidades (figura 36):

Figura 36



Ahora, podemos usar directamente la fórmula del teorema de Pitágoras en 3D y sustituir cada valor en la fórmula.

$$c^2 = 4^2 + 4^2 + 4^2$$

$$c^2 = 48$$

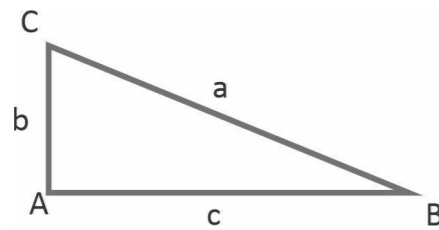
$$c = \sqrt{48} = 6,928$$



## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos un triángulo rectángulo **ABC**. En él, el vértice **A** corresponde al ángulo recto y los vértices **B** y **C** corresponden a los ángulos agudos. Por consiguiente, la letra **a** corresponderá al lado que se opone al ángulo recto (que denominamos anteriormente hipotenusa), y **b** y **c** a los lados que se oponen a los ángulos agudos (que denominamos catetos) (figura 37).

Figura 37



¿Cuántas razones podemos formar entre los lados a, b y c?  
Son 6 y corresponden a:

$$\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{b}{c}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{b}$$

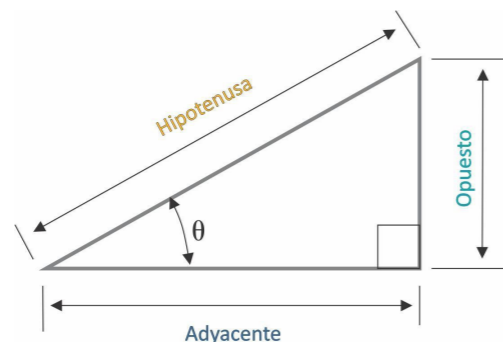
Vamos a definir estas razones dándoles un nombre. Tomaremos como referencia al ángulo agudo **B**. Para este ángulo, el cateto **b** (que es el que se opone al vértice **B**, está enfrente de él) se llamará **cateto opuesto** y el cateto **c** (que es el que está contiguo al vértice **B**) se llamará **cateto adyacente**.

Se llaman razones trigonométricas a aquellas que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con los ángulos agudos del mismo.

Para cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, uno de los catetos es el adyacente y el otro es el opuesto.

Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera (figura 38):

Figura 38



- Seno de un ángulo

Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

- Coseno de un ángulo

Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.

$$\text{cos } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

- Tangente de un ángulo

Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.

$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

### Algunas identidades trigonométricas importantes

Las tres igualdades que observamos en el apartado anterior, nos permiten relacionar a las razones trigonométricas. Estas igualdades se llaman identidades, pues son válidas para cualquier ángulo. Veremos las siguientes

$$\text{Si } \text{sen } \beta = \frac{c.o.}{\text{hip}} \Rightarrow h \cdot \text{sen } \beta = c.o., \text{ Si } \text{cos } \beta = \frac{c.a.}{\text{hip}} \Rightarrow h \cdot \text{cos } \beta = c.a.$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras  $(c.o.)^2 + (c.a.)^2 = h^2$

$$(h \text{ sen } \beta)^2 + (h \text{ cos } \beta)^2 = h^2 \text{ y dividiendo ambos miembros por } h^2 \text{ nos queda } \text{sen}^2 \beta + \text{cos}^2 \beta = 1$$

Otra identidad importante que vincula al seno, el coseno y la tangente es la siguiente:

Haciendo el cociente entre el seno y el coseno del ángulo  $\beta$

$$\frac{\text{sen } \beta}{\text{cos } \beta} = \frac{\frac{c.o.}{\text{hip}}}{\frac{c.a.}{\text{hip}}} = \frac{c.o.}{c.a.} = \text{tg } \beta$$

## INVERSAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cada vez que buscamos un ángulo conociendo el valor de alguna de sus razones trigonométricas, estamos aplicando una de las relaciones inversas de estas. Las funciones trigonométricas inversas se llaman **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente** y son las inversas de las funciones seno, coseno y tangente respectivamente.

Si queremos, por ejemplo, conocer el valor del ángulo  $x$  que hace verdadera la siguiente igualdad, utilizamos las funciones inversas  $\text{sen } x = 0,5$ , por lo tanto,  $x = \text{arcsen } 0,5$  y esto es igual a  $x = 30^\circ$ .

Es importante tener en cuenta que esta solución no es única si tenemos en cuenta que  $x$  tiene que valer entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , pues si a  $180^\circ$  le restamos  $30^\circ$ , obtenemos el ángulo de  $150^\circ$  para el cual el seno es igual a  $0,5$ . Si tomamos como dominio todos los reales, podremos observar que los valores  $390^\circ$ ,  $750^\circ$ , etc., también son solución, pues al valor  $30^\circ$  le sumamos sucesivas veces  $360^\circ$ .

Otro ejemplo:  $\text{tg } x = 1$ , por lo tanto,  $x = \text{arctg } 1$  y esto es igual a  $x = 45^\circ$ .

Ahora, es importante tener en cuenta que esta solución no es la única si tenemos en cuenta que  $x$  tiene que valer entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , pues si a  $45^\circ$  le sumamos  $180^\circ$  -obtenemos  $225^\circ$ -, el valor de la tangente nos dará también 1. Es decir, podremos observar que los valores  $45^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $405^\circ$ , etc., también son solución, pues al valor  $45^\circ$  le sumamos sucesivas veces  $180^\circ$ .

## RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Cuando conocemos datos suficientes para que un triángulo quede completamente definido, resolverlo es encontrar las medidas de los restantes elementos (ángulos y/o lados). Para triángulos rectángulos se pueden presentar dos problemas:

- Conocido un lado y un ángulo, calcular los demás elementos:

### Ejemplo

Dado el ángulo  $A = 35^\circ$  y el lado adyacente  $c = 10$  m de un triángulo rectángulo, calcular los demás ángulos y lados (figura 39).

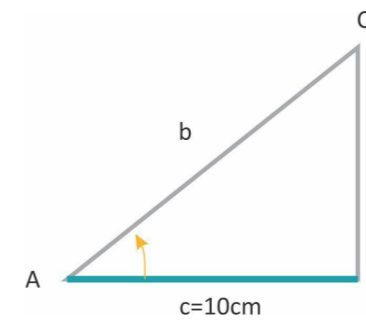


Figura 39

Comenzamos croquizando un triángulo rectángulo insertando los datos y las incógnitas.

El ángulo  $B = 90^\circ$ , el ángulo  $C = 180^\circ - B - A = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

Para calcular el lado  $a$ , podemos relacionar los lados  $a$ ,  $c$  y el ángulo en el vértice  $A$  (ángulo  $\alpha$ ), mediante la razón trigonométrica llamada tangente de:

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \text{tg } \alpha \Rightarrow a = 10 \cdot \text{tg } 35^\circ = 7 \text{ m}$$

De forma similar, calculamos el lado  $b$  (hipotenusa), relacionando los lados  $b$ ,  $c$  y el ángulo  $A$ :

$$\cos \alpha = \frac{c}{b} \Rightarrow b = \frac{c}{\cos \alpha} \Rightarrow b = \frac{10}{\cos 35^\circ} = 12,21 \text{ m}$$

- Conocidos dos lados, calcular los demás elementos.

### Ejemplo

Dado el lado adyacente  $c = 10$  m y el lado opuesto  $a = 4$  m de un triángulo rectángulo, calcular los ángulos y el lado restantes.

Comenzamos croquizando un triángulo rectángulo insertando los datos y las incógnitas (figura 40).

El ángulo  $B = 90^\circ$ , el ángulo  $A$  puedo hallarlo relacionando dicho ángulo con los lados conocidos:

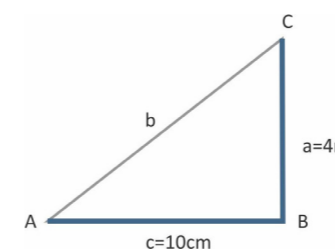


Figura 40

$$\text{tg } \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow \alpha = \text{arctg} \left( \frac{a}{c} \right) = \text{arctg} \left( \frac{4}{10} \right) \cong 21^\circ 48'$$



El ángulo B = 90°, y el ángulo C = 180° - B - A = 180° - 90° - 21.8° = 68,2°  
 El lado b desconocido, lo calculamos mediante:

a) el Teorema de Pitágoras (aplicando directamente los datos):

$$b^2 = a^2 + c^2 \rightarrow 4^2 + 10^2 = 116 \Rightarrow b = \sqrt{116} \cong 10,77 \text{ m}$$

o bien:

b) relacionando los lados b, c y el ángulo A:

$$\cos \alpha = \frac{c}{b} \Rightarrow b = \frac{c}{\cos \alpha} \Rightarrow b = \frac{10}{\cos 21^\circ 48'} \cong 10,77 \text{ m}$$

o también, si utilizamos la razón sen .

### Ángulos de elevación y depresión

El término ángulo de elevación denota al ángulo desde la horizontal hacia arriba a un objeto. Una línea de vista para el observador estaría sobre la horizontal. El término ángulo de depresión denota al ángulo desde la horizontal hacia abajo a un objeto. Una línea de vista para el observador estaría debajo de la horizontal (figura 41).

Figura 41



### Ejemplo - Propuesta de resolución

Cuando un avión pasa sobre un punto m ubicado en el suelo, una estación de observación que está situada a 4 km del punto m lo observa con un ángulo de elevación de 19.

Calcular la altura a la que se encuentra el avión en ese momento. Realizamos el siguiente planteo:



Dibujamos una figura representativa de la situación.	 figura 42
Planteamos la razón trigonométrica que corresponde según los datos que tenemos . En nuestro caso es la tangente porque tenemos un ángulo y su cateto adyacente y queremos calcular el cateto opuesto.	$tg 19^\circ = \frac{x}{4}$ Realizamos el pasaje de términos $4 \cdot tg 19^\circ = x$ $x \cong 1,4$
Damos respuesta al problema planteado.	La altura aproximada del avión es 1,4 km.

### RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Llamamos triángulos oblicuángulos a aquellos que no son rectángulos. En los triángulos oblicuángulos no hay catetos ni hipotenusa, por lo que no podemos aplicar las relaciones trigonométricas en forma directa ni aplicar el teorema de Pitágoras, tal como lo hacemos en los triángulos rectángulos.

Para resolver estos triángulos relacionamos los datos conocidos con los desconocidos mediante fórmulas.

Para ello utilizamos dos teoremas:

- a) Teorema del seno.
- b) Teorema del coseno.

a- Teorema del seno

Su enunciado es el siguiente:

La longitud del lado a es al seno del ángulo opuesto A, como la longitud del lado b es al seno del ángulo opuesto B, y como la longitud del lado c lo es al ángulo opuesto C (figura 43).

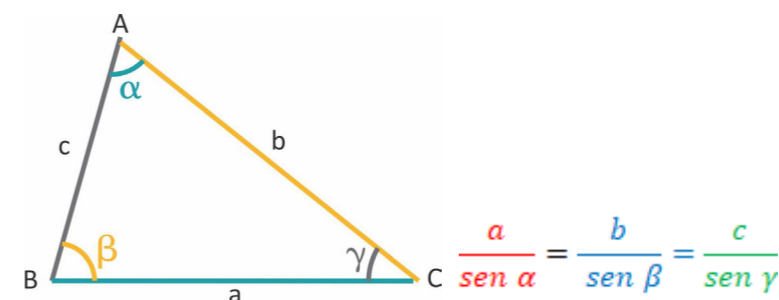
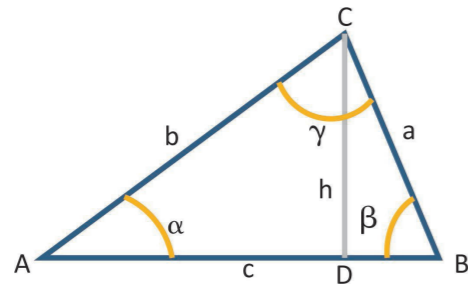


Figura 43

Figura 44



**Demostración:**

Si tomamos al lado AB como base del triángulo, la altura es la mínima distancia desde la base al vértice C (medida perpendicularmente a la base). La designaremos como "h". Considerando el ángulo  $\alpha$  y el ángulo  $\beta$ , podemos expresar las siguientes razones trigonométricas:

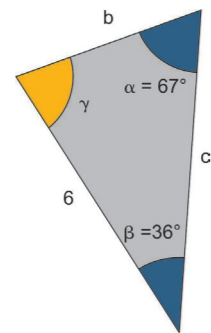
$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{b}, \quad \text{sen } \beta = \frac{h}{a}$$

Al despejar las alturas, obtenemos:  $h = b \cdot \text{sen } \alpha$ ,  $h = a \cdot \text{sen } \beta$  igualando las alturas, y operando, llegamos a:  
Considerando otros lados como base y obteniendo las alturas correspondientes, se llega al resto de las igualdades.

**Aplicaciones:**

**Ejemplo 1 (figura 45)**

Figura 45



Se tiene un triángulo con ángulos  $\alpha = 67^\circ$  y  $\beta = 36^\circ$  y un lado  $a = 6$  cm. ¿Cuánto mide el lado  $c$ ?

$$\frac{6}{\text{sen } 67} = \frac{b}{\text{sen } 36} \Rightarrow b = \frac{6 \cdot \text{sen } 36}{\text{sen } 67} = 3,74 \text{ m}$$

Para calcular el lado  $c$  necesitamos conocer el ángulo  $\gamma$ . Recordemos que en todo triángulo la suma de sus ángulos internos es  $180^\circ$ , es decir, tenemos la ecuación:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



Despejamos el ángulo  $\gamma$ :  $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$   
Sustituimos los valores:  $\gamma = 180^\circ - 67^\circ - 36^\circ$   
 $\gamma = 77^\circ$

Ahora podemos aplicar el teorema del seno:

$$\frac{c}{\text{sen } 77} = \frac{6}{\text{sen } 67} \Rightarrow c = \frac{6 \cdot \text{sen } 77}{\text{sen } 67} \cong 6,35 \text{ m}$$

Luego el lado  $c$  mide 6.35 cm.

**Ejemplo 2 (figura 46)**

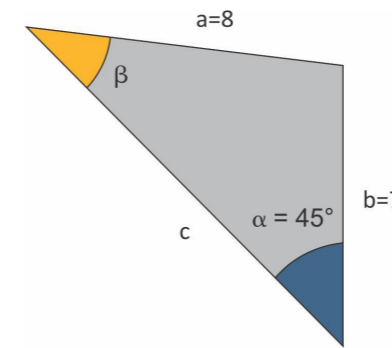


Figura 46

En el siguiente triángulo de lados  $a = 8$  cm y  $b = 7$  cm. Calcular cuánto mide el ángulo  $\beta$ , sabiendo que el ángulo  $\alpha$  mide  $45^\circ$ .

Como conocemos los lados  $a$  y  $b$  y el ángulo  $\alpha$ , aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} \Rightarrow \frac{8}{\text{sen } 45} = \frac{7}{\text{sen } \beta}$$

Despejamos el seno de  $\beta$ :  $\text{sen } \beta = \frac{7 \cdot \text{sen } 45^\circ}{8} = 0,61871$

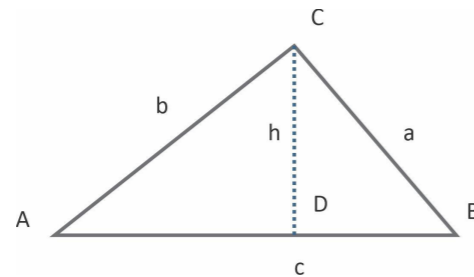
$$\beta = \text{arco seno } 0,61871 = 38,222$$

$\beta = 38^\circ 13'$  ( los segundos dependerán de la cantidad de decimales considerados)

b-Teorema del coseno

Su enunciado es el siguiente:

Dado un triángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de estos dos lados por el producto del coseno del ángulo comprendido entre ellos. Ya que un triángulo tiene tres lados, el teorema del coseno puede expresarse de tres formas distintas (figura 47):



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

**Demostración:**

Desarrollamos solamente la primera de ellas, ya que las otras dos demostraciones, se obtienen mediante el mismo procedimiento. Del triángulo BCD, y aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$a^2 = h^2 + DB^2$$

Por otra parte, del triángulo ACD, podemos expresar:  $h^2 = b^2 - AD^2$

Al sustituir la segunda expresión en la primera, resulta:  $a^2 = (b^2 - AD^2) + DB^2$

La longitud del segmento DB es igual:  $DB = c - AD$ , sustituyéndola en la anterior y operando:

$$a^2 = b^2 - AD^2 + (c - AD)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - AD^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD + AD^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot AD \quad \text{pero } AD = b \cdot \cos \hat{A}$$

$$\text{Luego } a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos \hat{A}$$

Demostrada así, la primera expresión del teorema del coseno. Cuando el ángulo A es igual a  $90^\circ$  (caso particular), el teorema del coseno se transforma en el Teorema de Pitágoras:

$$\text{Si } \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{A} = \cos 90^\circ = 0, \text{ por lo tanto } 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A} = 0, \text{ luego } a^2 = b^2 + c^2$$

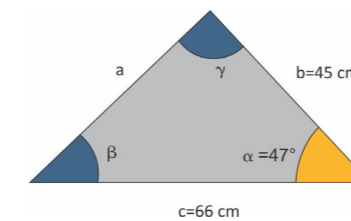
**Observación:**

Utilizamos el teorema del coseno cuando tenemos dos lados y el ángulo comprendido entre estos, o bien en el caso de tener los tres lados y queremos conocer los ángulos de un triángulo. En cualquier otra configuración de lados y ángulos utilizamos el Teorema del seno.

**Ejercicios resueltos**

**Problema 1**

Hallar los datos faltantes en el siguiente triángulo (figura 48).



Como queremos conocer el lado a del triángulo, aplicamos el Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos \hat{\alpha}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos \hat{\alpha}}$$

$$a = \sqrt{45^2 + 66^2 - 2 \cdot 66 \cdot 45 \cdot \cos 47^\circ}$$

$$a \cong 48,27 \text{ cm}$$

Para calcular  $\beta$ , aplicamos el Teorema del seno:

$$\frac{48,27}{\text{sen } 47} = \frac{45}{\text{sen } \beta}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{45 \cdot \text{sen } 47}{48,27} = 0,6818$$

$$\beta = 0,6818 \cong 42^\circ 59' \text{ (aproximado según número de decimales)}$$

Figura 47

Figura 48

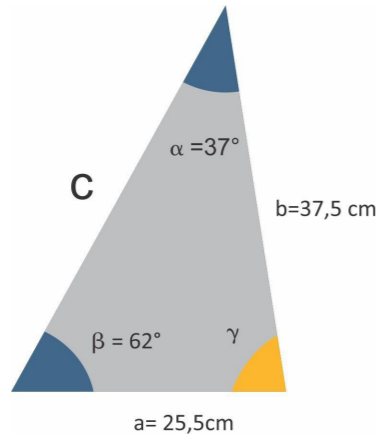


Para hallar  $\gamma = 180 - 42^\circ 59' - 47^\circ \Rightarrow \gamma = 90^\circ 1'$

### Problema 2

Hallar los datos faltantes (figura 49):

Figura 49



Comenzamos calculando el ángulo  $\gamma$

$$\gamma = 180 - 62 - 37^\circ \Rightarrow \gamma = 81^\circ$$

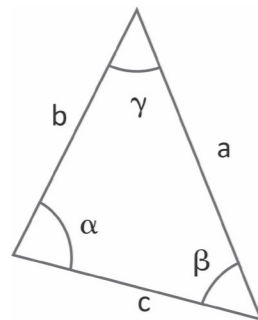
$$c = \sqrt{25,5^2 + 37,5^2 - 2 \cdot 25,5 \cdot 37,5 \cdot \cos 81^\circ}$$

$$c = 41,92 \text{ cm}$$

### Problema 3

En un triángulo sus lados miden  $a = 15 \text{ cm}$ ,  $b = 22 \text{ cm}$ ,  $c = 17 \text{ cm}$ . Hallar los ángulos del triángulo (figura 50).

Figura 50



Para encontrar el primer ángulo, digamos el ángulo  $\alpha$ , aplicamos el teorema del coseno, despejamos  $\alpha$  y encontramos el valor de  $\alpha$  que se encuentra en el primer cuadrante:

$$\cos \alpha = \frac{22^2 + 17^2 - 15^2}{2 \cdot 22 \cdot 17} = 0,7326$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos 0,7326 \Rightarrow \alpha = 42^\circ 54'$$

$$\cos \beta = \frac{17^2 + 15^2 - 22^2}{2 \cdot 15 \cdot 17} = 0,0588$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos 0,0588 \Rightarrow \beta = 86^\circ 38'$$

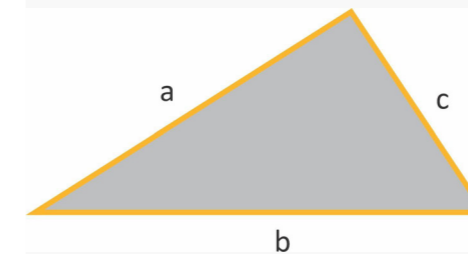
$$\text{Para averiguar } \gamma = 180 - 42^\circ 54' - 86^\circ 38' \Rightarrow \gamma = 50^\circ 28'$$

### La fórmula de Herón

La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo conociendo la longitud de sus lados.

Herón (siglo I d. C.) fue un ingeniero y matemático helenístico que vivió en Alejandría (provincia romana de Egipto). Fue uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad. Su logro más destacado en el campo de la geometría es la denominada fórmula de Herón, en la que se establece la relación entre el área de un triángulo y la longitud de sus lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  (figura 51):

Figura 51



$$\text{Área} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde  $p$  es el semiperímetro del triángulo

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

### Ejemplos

Usa la fórmula de Herón para encontrar el área de un triángulo con longitudes de lado de 13, 16 y 23 cm.

### Solución

Primero, encuentra el semi-perímetro, o sea  $p = \frac{13 + 16 + 23}{2} = 26$



Luego, reemplazar nuestros valores a la fórmula

$$Area = \sqrt{26(26 - 24)(26 - 26)(26 - 23)} \cong 101 \text{ cm}^2$$

### LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Podemos visualizar gráficamente el seno, el coseno y la tangente de un ángulo en un sistema cartesiano, si consideramos un punto P sobre una circunferencia de radio 1, a la que llamamos circunferencia trigonométrica o circunferencia unidad.

Sobre la circunferencia trigonométrica y, apoyándonos en las definiciones dadas de las razones trigonométricas, encontraremos segmentos que coincidan en su medida con cada una de las razones definidas, además de poder darles un signo.

La rotación de la semirrecta con centro en el punto (0;0) y ángulo de giro, corta a la circunferencia en un punto y determina un triángulo rectángulo

#### Razones trigonométricas

#### Funciones definidas en la circunferencia trigonométrica

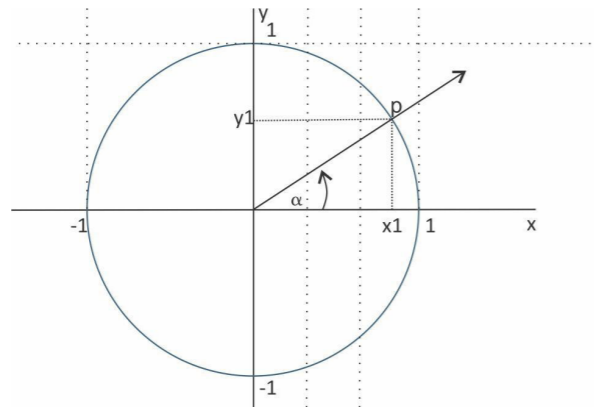


Figura 52

$$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot.}} \quad \text{---} \rightarrow \quad \text{sen } \hat{\alpha} = \frac{y_1}{\text{op}} \Rightarrow \text{sen } \hat{\alpha} = y_1$$

$$\text{cos } \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot.}} \quad \text{---} \rightarrow \quad \text{cos } \hat{\alpha} = \frac{x_1}{\text{op}} \Rightarrow \text{cos } \hat{\alpha} = x_1$$

$$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} \quad \text{---} \rightarrow \quad \text{tg } \hat{\alpha} = \frac{y_1}{x_1}$$

En resumen

<p>(figura 53)</p>	$\text{sen } \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hipot.}} = \frac{y_p}{r} = \frac{y_p}{1} = y_p$ <p>Por lo tanto, el segmento <math>y_p</math> está asociado al seno de <math>\alpha</math></p>
<p>(figura 54)</p>	$\text{cos } \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hipot.}} = \frac{x_p}{r} = \frac{x_p}{1} = x_p$ <p>Por lo tanto, el segmento <math>x_p</math> está asociado al coseno de <math>\alpha</math></p>
<p>(figura 55)</p>	$\text{tg } \hat{\alpha} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady.}} = \frac{y_p}{x_p} = \frac{MQ}{1} = MQ$ <p>Los triángulos <math>OPx_p</math> y <math>OMQ</math> son triángulos semejantes. Por lo tanto, el segmento <math>MQ</math> está asociado a la tangente de <math>\alpha</math>.</p>

Lo que hemos definido aquí para el ejemplo del ángulo alfa (que es agudo) se puede hacer extensivo para cualquier ángulo, aunque deberemos tener en cuenta el signo de las razones trigonométricas, de acuerdo a los cuadrantes en los cuales se hallen los ángulos.

Estos gráficos ayudarán a recordarlo (figura 56):

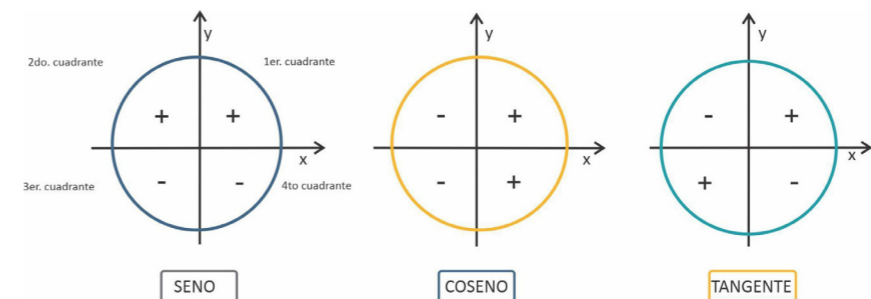


Figura 56



## Guía de Ejercicios Unidad II - Trigonometría

### Ejercicio 1

Completar el siguiente cuadro

Sistema sexagesimal	10°	36°	36°	80°			150°			288°	
Sistema circular					$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{\pi}{20}$	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{2}$

### Ejercicio 2

Problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras

2.1 Hallar la medida de las diagonales de un rectángulo de 24 cm de base y 18 cm de altura.

2.2 Calcular el perímetro del siguiente rombo (figura 57):

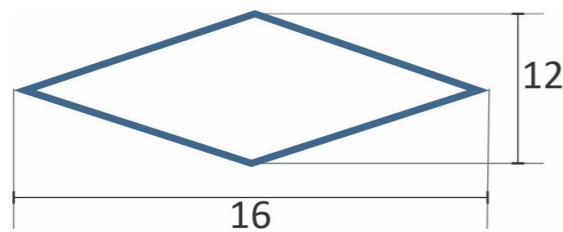


Figura 57

2.3 Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3m apoyada sobre una pared si la parte inferior la situamos a 70 cm de esta (figura 58).

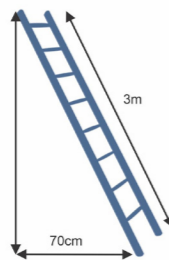


Figura 58

2.4 Un aula de UNRaf tiene 9 metros de largo, 6 metros de ancho y una altura de 4m. Una hormiga y una mosca se encuentran en el piso en el extremo inferior izquierdo y se dirigen hacia el extremo superior derecho (es decir, el vértice opuesto en el techo). ¿Cuánto mide el recorrido

más corto que pueden realizar?

2.5 La medida que se utiliza en los televisores es la longitud de la diagonal de la pantalla en unidades de pulgadas. Una pulgada equivale a 2,54 cm:

Si queremos comprar un TV para colocarlo en un hueco de 96x79cm, ¿de cuántas pulgadas como máximo debe ser el televisor?

2.6 La playa de estacionamiento es un rectángulo de 35mx98m y está controlada por cuatro cámaras de vigilancia.

La cámara A observa el área 1; la B, el área 2; la C, el área 3; la D, el área 4.

Calcular el % de superficie del estacionamiento que no es vigilada por ninguna cámara (figura 59):

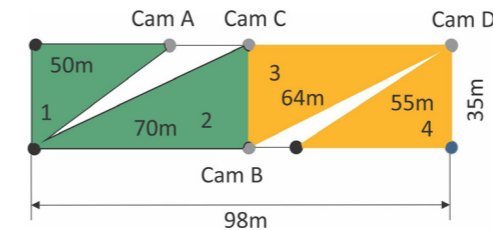


Figura 59

2.7 ¿Qué altura tiene que tener una persona si quiere entrar parado en la carpa? (figura 60).

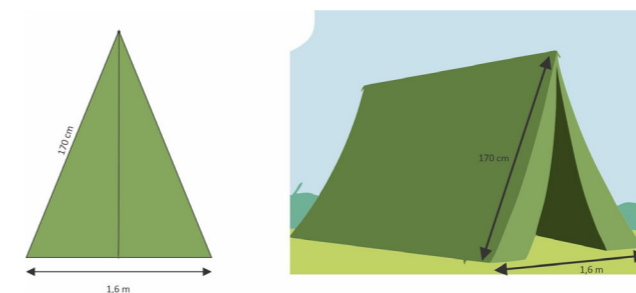


Figura 60

2.8 Un compás tiene separadas las puntas de sus patas 100 milímetros, mientras que la vertical desde el eje hasta el papel alcanza una altura de 120 milímetros. ¿Cuál es la medida, en milímetros, de cada una de sus patas?(figura 61).

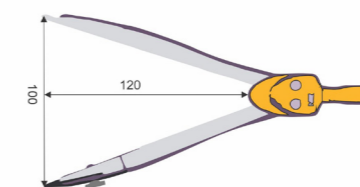


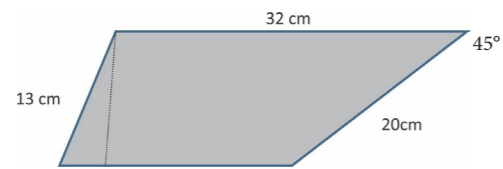
Figura 61

UNRaf  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE  
RAFAELA



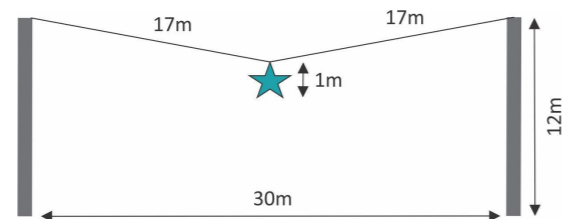
2.9 Hallar el perímetro de la figura (figura 62).

Figura 62



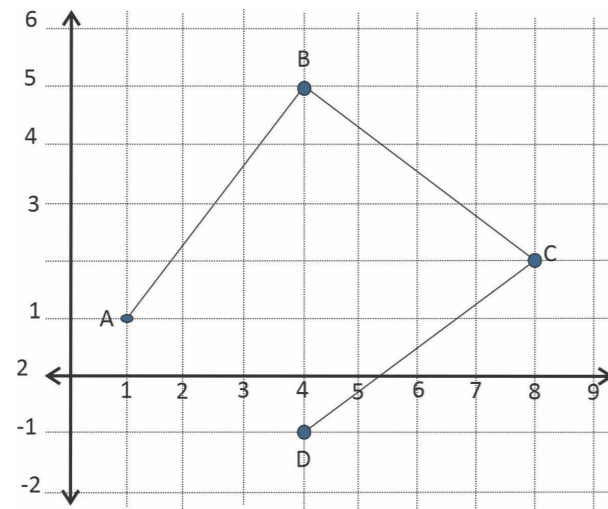
2.10 Hallar la distancia entre el piso y la parte más baja de la estrella que cuelga (figura 63).

Figura 63



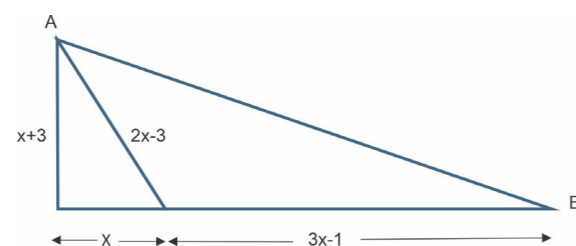
2.11 Si un móvil se desplaza desde A hasta D, siguiendo la trayectoria del polígono ABCD, ¿qué distancia recorre? (figura 64).

Figura 64



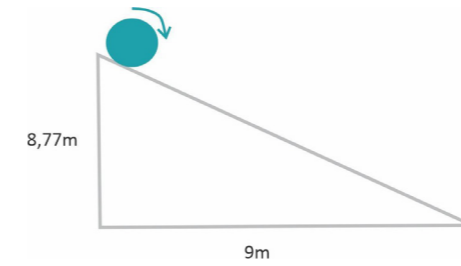
2.12 ¿Cuál es la distancia entre los puntos A y B? (figura 65).

Figura 65



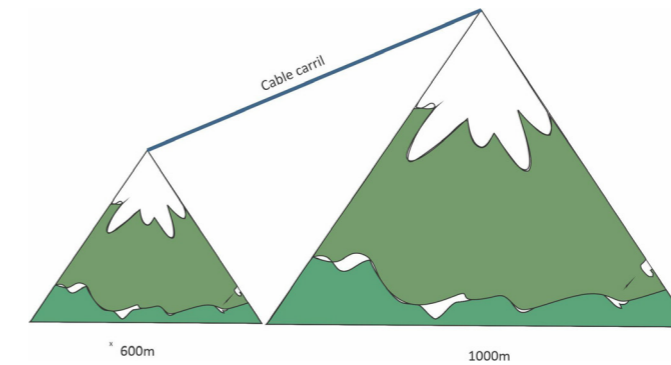
2.13 ¿Cuántas vueltas da el tronco al rodar sobre la rampa? El diámetro del tronco es de 20 cm (figura 66).

Figura 66



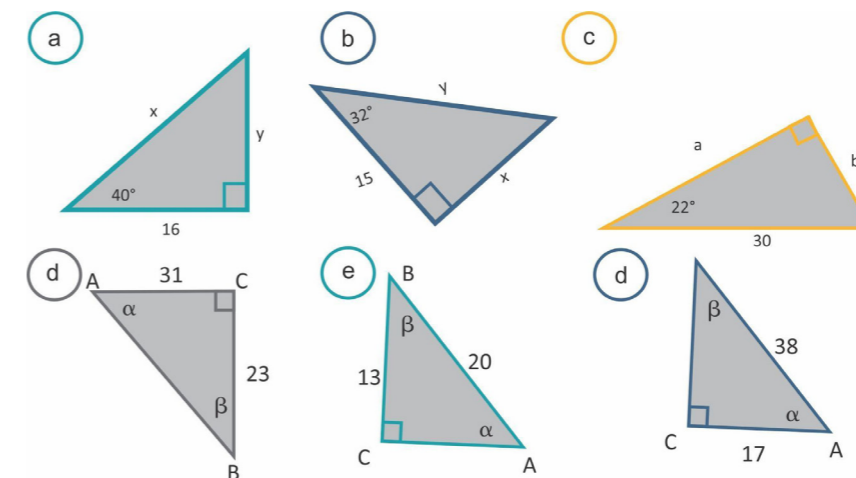
2.14 Hallar la distancia del cablecarril que une la cúspide de las dos montañas. Ambas son triángulos equiláteros (figura 67).

Figura 67



Hallar los lados y ángulos faltantes en los siguientes triángulos rectángulos (figura 68).

Figura 68



#### Ejercicio 4

4.1 Hallar la superficie y los ángulos de un triángulo isósceles de 5cm de base y 8cm de lado.

4.2 Hallar la altura de un poste sabiendo que la cuerda que lo sostiene al piso mide 15 m y que forma un ángulo de  $25^\circ$  con este.

4.3 La distancia entre dos edificios A y B es de 120 m. Si el edificio A mide 98 m de altura y el ángulo de elevación desde el punto más alto del edificio A al punto más alto del edificio B es de  $31^\circ$ , hallar la altura del edificio B.

4.4 A partir de un punto situado a 37,5 m de la base de un edificio y sobre el mismo plano horizontal de dicha base, se miden los ángulos de elevación al borde superior del edificio y al extremo más alto del asta que sostiene una bandera. Los ángulos medidos son de  $67^\circ 20'$  y  $68^\circ 41'$ . Determinar la longitud del asta.

4.5 Una persona que mide 1,7 m de pie sobre un acantilado de 50 m de altura observa dos boyas con ángulos de depresión de  $18^\circ$  y  $20^\circ$ , respectivamente. Calculen:

- La distancia entre las boyas.
- La distancia entre la persona y la boya más cercana.

4.6 Observamos el punto más alto de una torre bajo un ángulo sobre la horizontal. Si nos alejamos 350 metros, lo vemos bajo un ángulo de  $31^\circ$ . ¿A qué altura se encuentra la torre?

4.7 Calcular la altura del globo(figura 69):

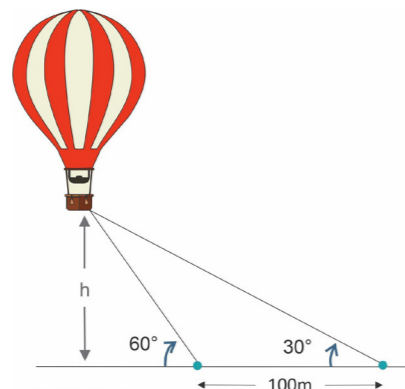


Figura 69



4.8 David quiere saber la altura de la Torre de Pisa. Para ello, observa su extremo bajo un ángulo de  $28^\circ$ . Al desplazarse 70 metros hacia la derecha el ángulo es de  $65^\circ$ , todavía al mismo lado de la torre. ¿Cuánto mide la torre?

4.9 Observamos el punto más alto de una torre bajo un ángulo de  $72^\circ$  sobre la horizontal. Si nos alejamos 350 metros, lo vemos bajo un ángulo de  $31^\circ$ . ¿A qué altura se encuentra la torre? (261,3 m).

4-10 Calcular la base (lado x) de la siguiente figura construida con dos triángulos rectángulos (figura 70).

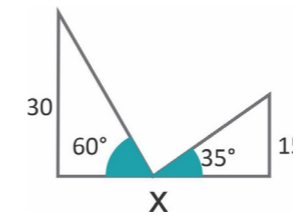


Figura 70

4.11 Calcular la base (lado x) del siguiente triángulo escaleno (figura 71).

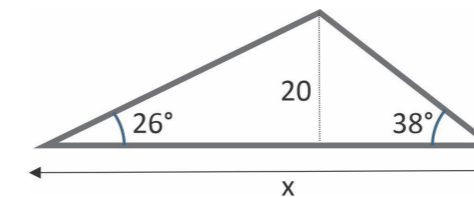


Figura 71

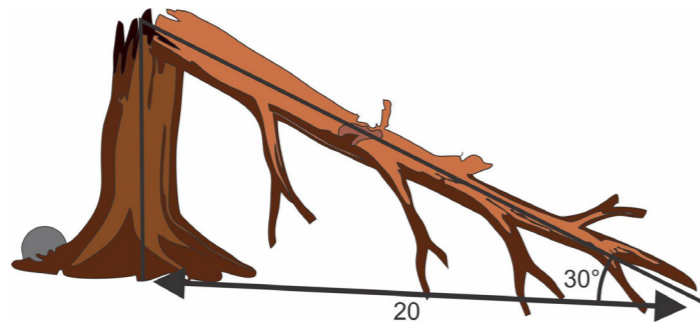
4.12 Desde la terraza de un edificio de 80 metros de altura, una persona observa un edificio más alto en la vereda de enfrente cuya altura es de 95 m. Para ver la azotea del edificio, el ángulo de elevación es de  $30^\circ$ .

- Hallar la distancia que separa ambos edificios.
- ¿Cuál es el ángulo de depresión para ver la base del edificio?

4.13 En un compás los brazos miden 24 cm. ¿Cuál es el ángulo de apertura que le debo dar a los brazos si quiero trazar un círculo de 10 cm de radio?

4.14 El viento corta un árbol y la punta se apoya en el suelo a 20 m de la base del tronco formando un ángulo de  $30^\circ$  con el plano horizontal. ¿Qué altura tenía el árbol antes de cortarse?(figura 72).

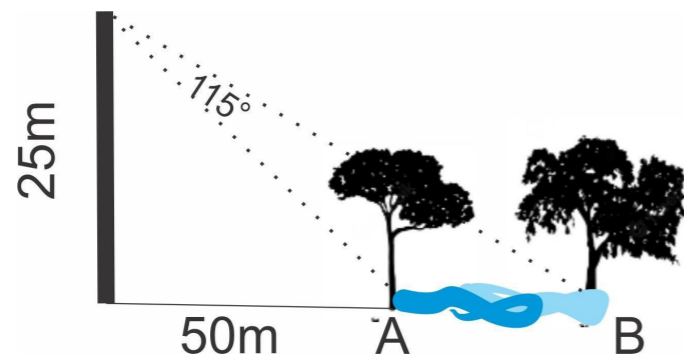
Figura 72



4.15 En un triángulo rectángulo el cateto vertical mide 23 cm más que el cateto horizontal, y la hipotenusa mide 25 cm más que este (que el horizontal). Hallar los ángulos interiores del triángulo.

4.16 Hallar el ancho del río (figura 73).

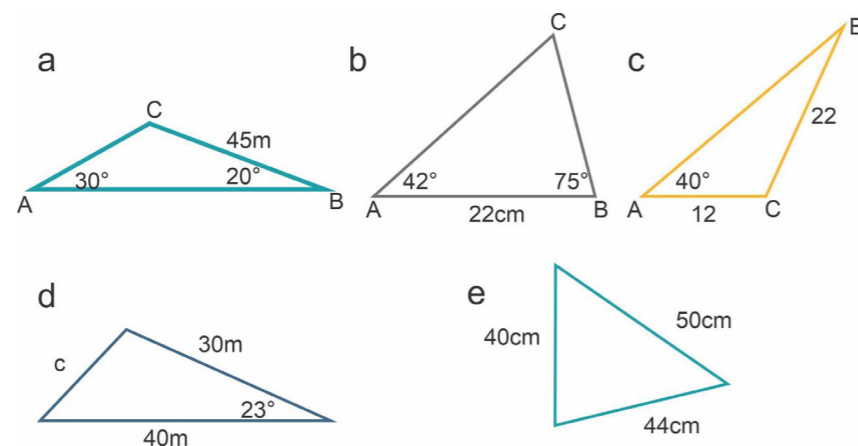
Figura 73



### Ejercicio 5

Calcular el valor de los lados y ángulos faltantes en los siguientes triángulos (figura 74):

Figura 74



### Ejercicio 6

Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y  $60^\circ$  en el ángulo que forman entre ambos. Calcula cuánto mide el perímetro de la valla.

### Ejercicio 7

Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Pablo hay 25 metros, y entre Pablo y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de  $20^\circ$ . Calcula la distancia entre Alberto y Camilo.

### Ejercicio 8

Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de  $50^\circ$ , y otro B situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de  $60^\circ$ . Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 km del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.

### Ejercicio 9

Santiago está construyendo una casita de juegos para sus hijos. Para hacer el techo, corta una madera de 2,50 m de largo en tres partes y forma un triángulo. Uno de los lados mide 0,70 m y el otro, 1,20 m. ¿Cuál es la medida de los ángulos del triángulo?

### Ejercicio 10

Las agujas del reloj de la Catedral miden 45 cm y 68 cm. Hallar qué distancia separa los extremos de las agujas cuando son las 5 de la tarde.

### Ejercicio 11

Un poste telefónico está inclinado con un ángulo de  $15^\circ$  de la vertical del sol. El poste produce una sombra de 10 m de largo cuando el ángulo de elevación del sol es de  $24^\circ$ . Hallar la longitud del poste. Encuentre la longitud (figura 75).

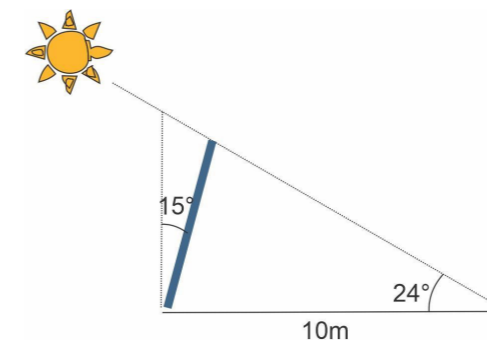


Figura 75

### Ejercicio 12

Un globo aerostático que está en el aire está amarrado con dos cuerdas de cada lado vinculadas al piso donde hay dos estacas. La separación entre las estacas es de 800 m. El ángulo que forma la cuerda

de la derecha con el piso es de  $\frac{4}{15}\pi$  y el ángulo que forma la cuerda

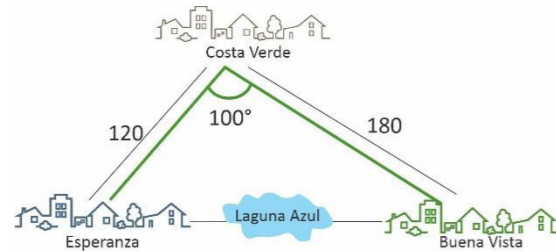
de la izquierda con el piso es de  $\frac{11}{30}\pi$ .

- Hallar la longitud de cada una de las cuerdas de amarre.
- Hallar a qué altura se encuentra el globo.

### Ejercicio 13

Se desea construir una autovía para unir en forma directa las localidades de Esperanza y Buena Vista. Para eso, se realiza un puente sobre la laguna Azul. En la actualidad, se llega a la ciudad de Buena Vista siguiendo el trayecto Esperanza - Costa Verde - Buena Vista. ¿En cuántos kilómetros se disminuirá el viaje con la nueva red vial?

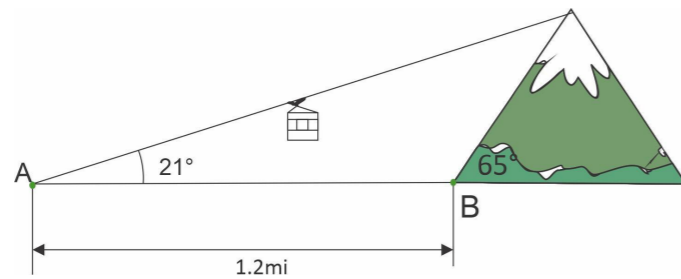
Figura 76



### Ejercicio 14

Hallar la longitud del cable carril (figura 77).

Figura 77



### Ejercicio 15

Hallar el valor de los lados y de los ángulos faltantes en la siguiente figura:

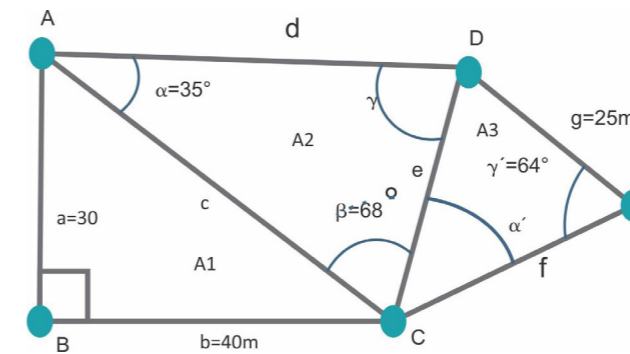


Figura 77

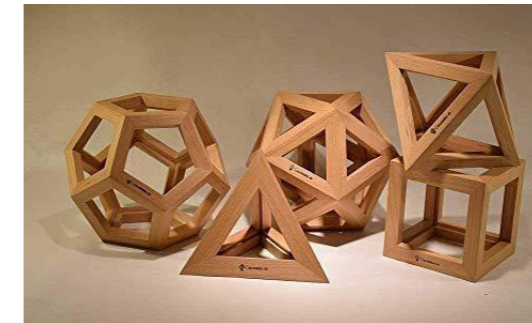


# 03.

## Polígonos y Poliedros

### Resumen

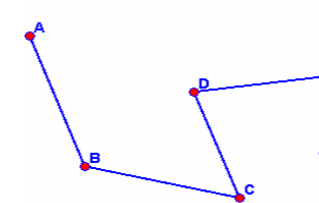
En esta sección presentaremos a los polígonos y sus diferentes clasificaciones. Luego de estudiar sus propiedades extenderemos el análisis del plano al espacio para analizar algunos casos interesantes y útiles de los poliedros.



### Polígonos

*¿Qué es un polígono?*

Primero definimos lo que es una poligonal:  
Una **línea poligonal** es un conjunto de **segmentos concatenados** (cada uno empieza donde acaba el anterior). Pueden ser: **abiertas** o **cerradas**.



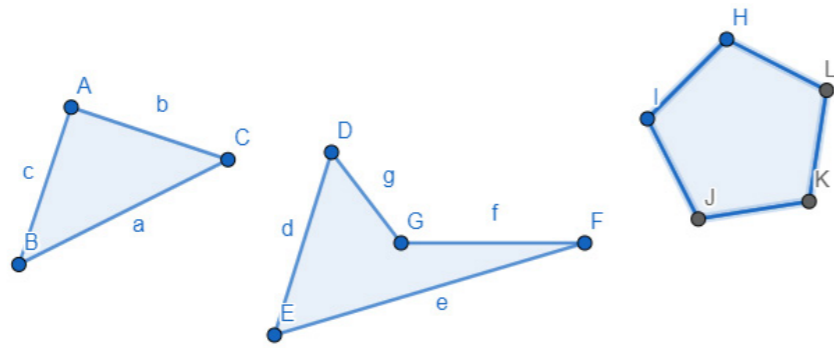
Línea poligonal abierta

La superficie contenida por una línea poligonal cerrada se llama **polígono**.

La definición rigurosa es que un polígono es una figura geométrica plana o porción de un plano, limitada por una línea poligonal cerrada, formada por tres o más segmentos de recta.

Al decir tres o más segmentos de rectas, incluimos dentro de los polígonos a los triángulos y a los rectángulos.

Las superficies de cualquier polígono se pueden dividir siempre en triángulos y es un recurso muy usado para calcular áreas:



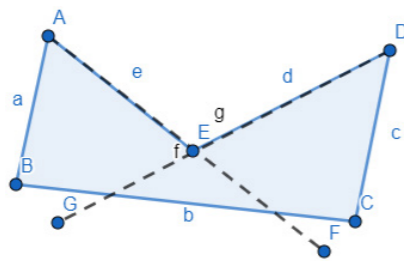
### Tipos de polígonos

Los polígonos se pueden dividir en dos grandes grupos: los polígonos cóncavos y los polígonos convexos.

### Polígonos cóncavos

Un polígono se denomina cóncavo si tiene un lado tal que al prolongarlo determina dos semiplanos que contienen parte del polígono, esto es que si prolongamos uno de sus lados tocamos el interior del mismo.

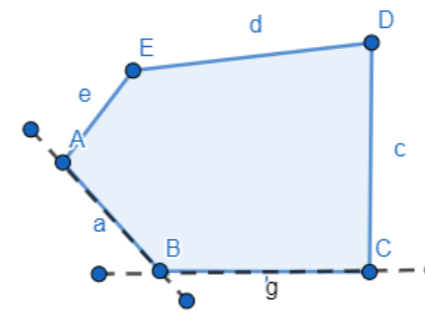
En un polígono cóncavo, al menos uno de sus ángulos interiores es mayor que ( ó si trabajamos en radianes).



Polígono cóncavo

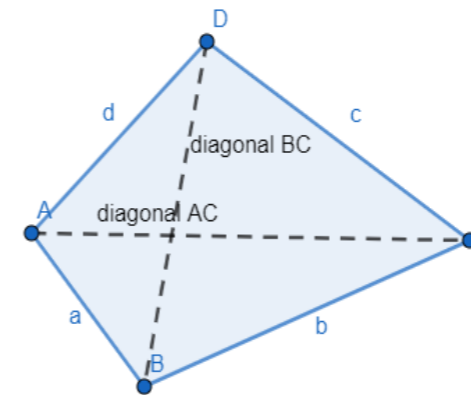
### Polígonos convexos

Un polígono se denomina convexo si todos sus ángulos interiores son menores que ( ó si trabajamos en radianes) y todas sus diagonales son interiores.



### Cuadriláteros


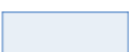

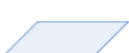
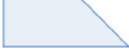


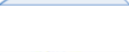

Los cuadriláteros son polígonos de cuatro lados.



- Los lados consecutivos son los que tienen un extremo en común.
- AB es consecutivo con BC.
- Los lados opuestos son los que no tienen puntos en común.
- AB es opuesto con CD.
- Se denominan diagonales a los segmentos determinados por dos vértices no consecutivos AC y BD.


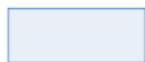
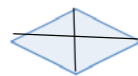
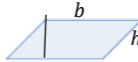




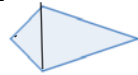
## Clasificación

Los cuadriláteros pueden tener dos pares de lados paralelos, un par de lados paralelos o ningún par de lados paralelos. A partir de esta observación surge una primera clasificación en paralelogramos, trapecios y trapezoides, respectivamente:

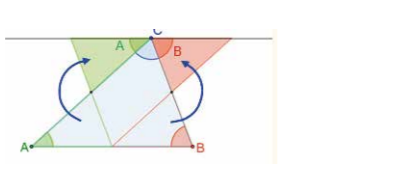

C U A D R I L Á T E R O S	Los lados son paralelos dos a dos.	Paralelogramos	4 lados iguales. 4 ángulos rectos.	Cuadrado	
			Lados iguales dos a dos. 4 ángulos rectos.	Rectángulo	
			4 lados iguales y 2 ángulos iguales dos a dos.	Rombo	
			Lados y ángulos iguales dos a dos.	Paralelogramo	
	Solo tienen dos lados paralelos.	Trapecios	Dos lados paralelos y un lado perpendicular a estos	Trapecio Recto	
			Lados no paralelos iguales.	Trapecio isósceles	
			Lados no paralelos desiguales y no perpendiculares a los paralelos.	Trapecios escaleno	
	No tienen lados paralelos.	Trapezoides		Trapezoides	
				Romboides	



## Áreas y Perímetros

		Perímetro	Área
C U A D R I L Á T E R O S	Cuadrado	 $l = \text{lado}$	$P = 4l$ $A = l^2$
	Rectángulo	 $b : \text{base}, h : \text{altura}$	$P = 2b + 2h$ $A = b h$
	Rombo	 $D y d \text{ diagonales}$	$P = 4l$ $A = \frac{(D + d)}{2}$
	Paralelogramo	 $b : \text{base}, h : \text{altura}$	$P = 2l_1 + 2b$ $A = b h$
	Trapecio Recto	 $b : \text{base menor}, B : \text{base mayor}, h : \text{altura}$	$P = b + B + h + l_1$ $A = \frac{(B + b)h}{2}$
	Trapecio isósceles		$P = b + B + 2l_1$ $A = \frac{(B + b)h}{2}$
	Trapecios escaleno		$P = b + B + l_1 + l_2$ $A = \frac{(B + b)h}{2}$
	Trapezoides		$P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ Descomponer en triángulos
	Romboides		$P = 2l_1 + 2l_2$ $A = \frac{(D + d)}{2}$

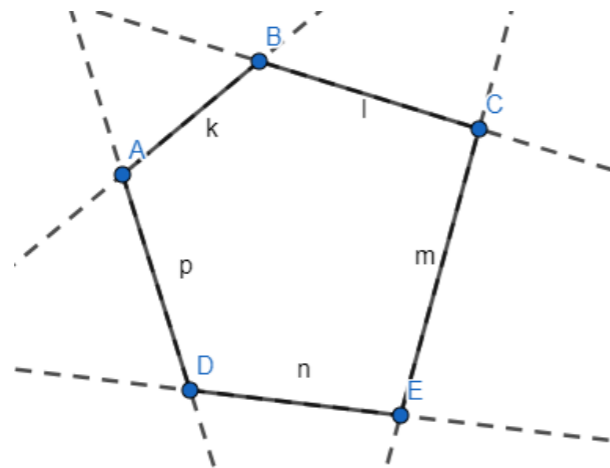
### Suma de ángulos interiores de un cuadrilátero

	
<p>La suma de los ángulos interiores de triángulo es <math>180^\circ</math> (<i>π en r a d i a n e s</i>)</p>	<p>La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es <math>360^\circ</math> (<i>2π en r a d i a n e s</i>)</p>
<p>La deducción se puede apreciar en el gráfico recordando la propiedad de ángulos opuestos entre paralelas</p>	<p>Dividimos el cuadrilátero en dos triángulos por lo que <math>180^\circ + 180^\circ = 360^\circ</math></p>

### Polígonos (de lados)

Vimos que un polígono es una figura plana cerrada delimitada por segmentos.

A estos segmentos se les llama lados. La palabra polígono está formada por dos voces de origen griego: "polys": muchos; y "gonos": ángulos; por lo tanto, es una figura con varios ángulos.



Elementos del polígono

Entre los diferentes elementos con los que podemos caracterizar un polígono podemos mencionar a sus lados, ángulos, vértices y diagonales, como se observa en la figura ubicada en la parte superior.



### Lados

Son los segmentos que definen el perímetro del polígono. Como veremos, es común denominar a los polígonos de acuerdo a la cantidad de lados que tienen.

### Ángulos

Los ángulos interiores se definen del mismo modo que para el triángulo, quedando definidos por dos lados consecutivos. Así como vimos anteriormente que para los triángulos la suma de sus ángulos interiores es igual  $180^\circ$ , para el caso de los polígonos también existe una relación para la suma de los ángulos:

$$\Sigma \text{ ángulos interiores} = 180 (n - 2) \text{ o } \pi(n - 2), \text{ donde}$$

$\Sigma$  (*símbolo sumatoria*) donde n es la cantidad de lados del polígono.

Esta ecuación nos indica que la sumatoria de todos los ángulos interiores es igual a 180 veces la cantidad de lados menos dos. Para el caso del triángulo, que como dijimos es un caso particular de los polígonos, tenemos que n es igual a 3, por lo tanto:

$$\Sigma \text{ ángulos interiores triángulo} = 180 (3 - 2) = 180^\circ$$

### Vértices

Al igual que con los triángulos, los vértices se definen como el punto que comparten dos lados de un polígono.

### Diagonales

Las diagonales se definen como los segmentos que unen dos vértices que no pertenecen al mismo lado.

Vemos que desde un vértice cualquiera, la cantidad de diagonales que se pueden trazar en un polígono es igual a:

$$\text{diagonal desde un vértice} = n - 3$$

Donde n es la cantidad de vértices que tiene el polígono.

Razonamos por qué se pueden trazar n-3 diagonales desde un vértice.

Estando en un vértice cualquiera, podemos trazar diagonales hasta cualquier otro vértice a excepción de sí mismo y los vértices con los que comparte un lado en común, ya que para estos vértices la diagonal sería igual al lado.

Existe otra relación que nos permite obtener la cantidad total de dia-

gonales que se pueden trazar dentro de un polígono, y es la siguiente:

$$\text{Cantidad de diagonales} = (n_v - 3) \cdot \frac{n_v}{2}$$

### Clasificación según la longitud de sus lados

#### Irregulares

Se llama polígono irregular a un polígono cuyos lados y ángulos interiores no son todos iguales.

En el caso particular de los triángulos, excepto los equiláteros, el resto son irregulares.

En el caso de los cuadriláteros son regulares los cuadrados, pero los rectángulos, paralelogramos, trapecios, trapezoides, y demás, son irregulares.

#### Regulares

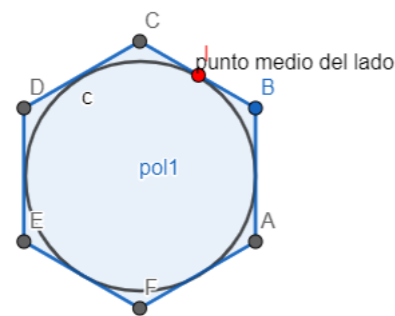
Se denomina polígono regular a un polígono cuyos lados y ángulos son todos iguales entre sí.

Como caso particular, son los triángulos equiláteros y los cuadrados. En general, para polígonos de más lados se añade el término regular (así, una figura de 5 lados iguales con 5 ángulos iguales, por ejemplo, la nombramos pentágono regular).

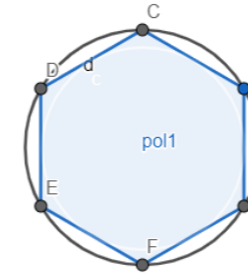
Los vértices de todos los polígonos regulares siempre están inscritos en una circunferencia.

Para polígonos regulares de más de 4 lados, existen dos elementos más, **apotema** y **radio**. Para entender su significado debemos analizar los conceptos de circunferencia **inscrita** y **circunscrita**.

**Circunferencia inscrita en el polígono:** es aquella que toca todos los lados del polígono regular en su punto medio. Gráficamente, se puede ver como la circunferencia más grande que queda contenida dentro del polígono.

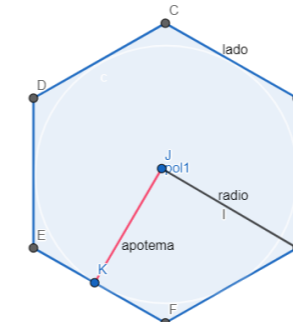


**Circunferencia circunscrita al polígono:** es la que toca todos los vértices del polígono. Es la circunferencia más pequeña capaz de incluir la totalidad del polígono en su interior.



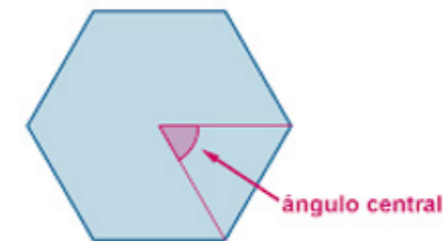
Una vez definidas las circunferencias inscritas en un polígono y circunscritas a un polígono es más fácil interpretar el apotema y el radio.

**Apotema:** es el radio de la circunferencia inscrita en el polígono. Es igual la mínima distancia desde el centro del polígono a sus lados. Siempre intercepta los lados del polígono en su punto medio.



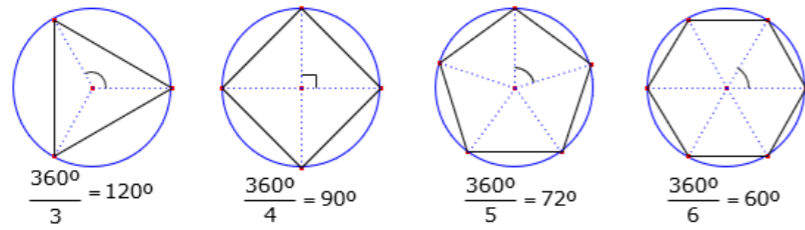
**Radio de un polígono:** es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono, es decir, de la circunferencia que contiene al polígono. O sea, es la distancia del centro a uno de sus vértices.

**Ángulo central:** ángulo que tiene por vértice el centro del polígono y por lado dos radios consecutivos.



$$A_{central} = \frac{360}{n} \quad \text{donde } n: \text{cantidad de lados}$$





Para recordar:  $n$  cantidad de lados del polígono.

Número de diagonales:  $N_d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

Suma de ángulos interiores:  $S_{\text{ángulos interiores}} = 180^\circ \cdot (n - 2)$

Ángulo Central:  $A_c = \frac{360^\circ}{n}$

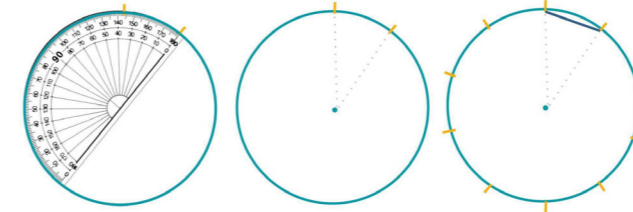
Los polígonos reciben distintos nombres dependiendo de la cantidad de lados:

Nombre	Número de lados	Figura	Nombre	Número de lados	Figura
Pentágono	5		Decágono	10	
Hexágono	6		Endecágono	11	
Heptágono	7		Dodecágono	12	
Octógono	8		Pentadecágono	15	
Eneágono	9		Isodecágono	20	

En un polígono regular cuanto más aumenta la cantidad de lados, más se aproxima a un círculo.

### CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES

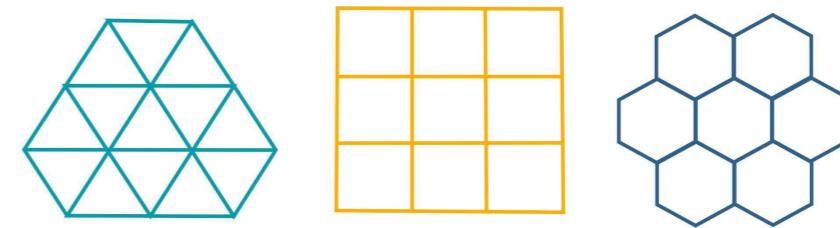
Para construir un polígono regular lo pensamos inscripto en la circunferencia.



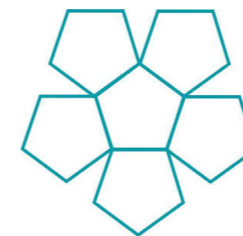
El ángulo central  $A_c = \frac{360^\circ}{n}$  (por ejemplo, en la figura dibujamos un decágono). En primer lugar, dibujamos la circunferencia, marcamos el radio y construimos un ángulo de  $36^\circ$  sobre él. Tomamos con el compás la medida  $AB$  (lado del polígono) y la trasladamos en la circunferencia. Por último, trazamos los lados del polígono.

### Cubriendo el plano

En el arte, el diseño textil y en el diseño en general resulta muy interesante poder saber qué polígonos recubren totalmente al plano, sin dejar espacios vacíos ni superponerse entre ellos.



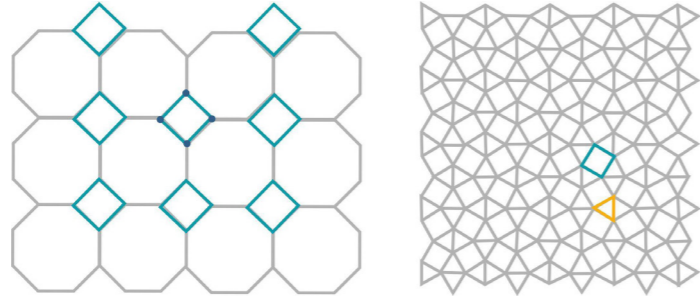
Con triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos es posible cubrir el plano:



Con pentágonos regulares no es posible cubrir el plano. A excepción de los vistos, no sería posible cubrir el plano con polígo-



nos regulares, aunque sí sería posible en algunos casos, utilizando polígonos distintos, por ejemplo, cuadrados y octógonos, o cuadrados y triángulos, etc.

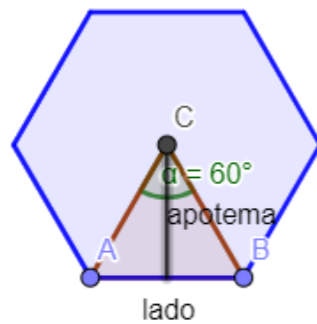


Cubrir el plano con polígonos se denomina teselado.

### Área de Polígonos regulares

Para calcular el área de un polígono regular cualquiera se divide al polígono en triángulos uniendo el centro con cada uno de los vértices.

La altura de cada uno de los triángulos es el apotema del polígono. Se calcula el área de uno de los triángulos y se suma por la cantidad de triángulos.



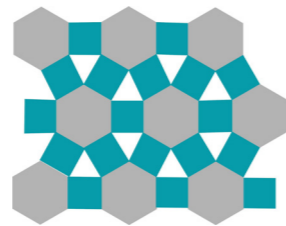
$$\text{Área del triángulo: } \frac{\text{lado} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$\text{Área del polígono:}$$

$$\frac{n \cdot \text{lado} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

### Ejercicio

Calcular el área de las coronas poligonales del mosaico representado (las formadas por triángulos y cuadrados que rodean a cada uno de los hexágonos). El lado del hexágono es igual al del dodecágono y mide 30 cm. El apotema del hexágono mide 25,98 cm. La apotema del dodecágono mide 55,98 cm.



Calculamos el área del hexágono interior:

$$A_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot 30 \cdot 25,98}{2} = 2338,2 \text{ cm}^2$$

Calculamos el área del dodecágono (formado por los cuadrados y los triángulos):

$$A_{\text{dodecágono}} = \frac{12 \cdot 30 \cdot 55,98}{2} = 10076,4 \text{ cm}^2$$

El área de la corona será la resta de las áreas:

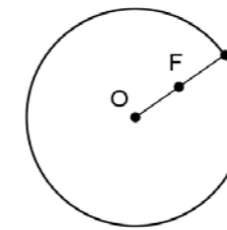
$$A_{\text{corona}} = 10076,4 \text{ cm}^2 - 2338,2 \text{ cm}^2 = 7738,2 \text{ cm}^2$$

### Circunferencia y Círculo

No son polígonos, pero los podemos pensar como un polígono de infinitos lados.

#### Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a una distancia fija r dada, llamada radio, de un punto fijo O dado, llamado centro.



La circunferencia de centro O y radio r se denota como: C(O; r)

**Puntos interiores:** todos los puntos del plano de una circunferencia, tales que sus distancias al centro son menores que el radio, se llaman **puntos interiores** a dicha circunferencia. Así, en la figura anterior, F es un punto interior porque el segmento OF, que es la distancia de F al centro de la circunferencia, es menor que el radio.

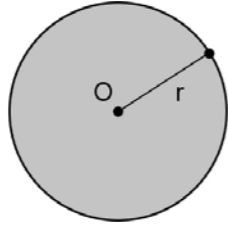
#### Círculo

Se llama círculo de centro O y radio r a la figura formada por los puntos de la circunferencia de centro O y radio r, y por los interiores a ella.

El círculo de centro O y radio r se expresa simbólicamente como: C(O; r)



r). Obsérvese que el círculo es una parte del plano que tiene por contorno, por borde, o por frontera, a la circunferencia de igual centro y radio, mientras que la circunferencia es una curva.



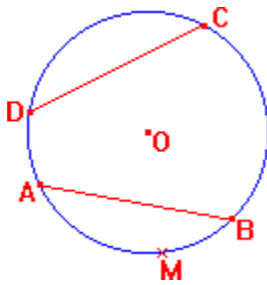
El círculo es la porción de plano interior a la circunferencia, más esta.

#### Cuerda

Se llama cuerda al segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

#### Ejemplo

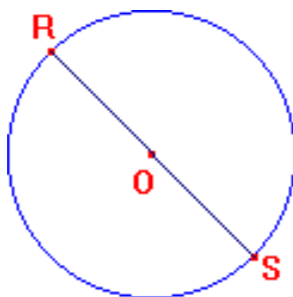
Los segmentos AB y CD de la figura son cuerdas de la circunferencia O.



Los extremos de una cuerda dividen a la circunferencia en dos arcos que se llaman arcos correspondientes a la cuerda o arcos subtendidos por la cuerda.

#### Diámetro

Se llama diámetro a toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.



#### Consecuencias de la definición

**Consecuencia 1:** El diámetro es igual al duplo del radio.

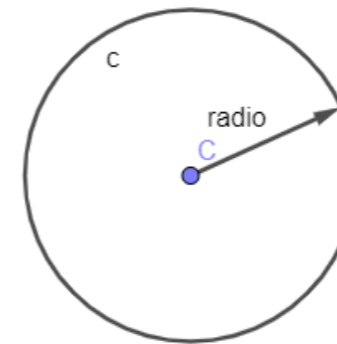
Designando con D al diámetro RS, resulta:  $D = 2r$

**Consecuencia 2:** Todos los diámetros de una circunferencia son congruentes.

Entonces, de acuerdo a esta segunda conclusión se puede decir "el diámetro" de una circunferencia, para referirse a un diámetro cualquiera de la misma.

Perímetro de la circunferencia:  $\pi \cdot \text{Diámetro} = 2\pi \cdot \text{radio}$

Área de la circunferencia:  $\pi \cdot r^2$



#### LOS POLIEDROS

Los poliedros son cuerpos geométricos que tienen todas sus caras planas y encierran un volumen finito. Muchos objetos de nuestro alrededor tienen forma de poliedro:



Las caras tienen forma de rectángulo y de pentágonos



Las caras tienen forma de hexágono y de rectángulos



Las caras tienen forma de triángulos y cuadrados

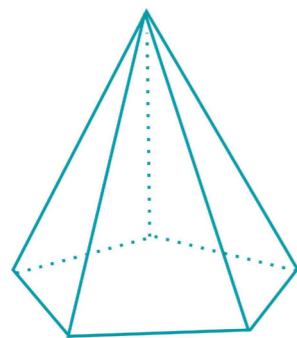
Los elementos de un poliedro son caras, vértices y aristas. Las **caras**

son los polígonos que la limitan. Las **aristas** son los lados de las caras, y limitan dos caras contiguas. Los **vértices** son los de las caras. En cada vértice de un poliedro concurren tres o más caras. Así como en el caso de los polígonos, los poliedros también pueden distinguirse entre convexos y cóncavos.

**Poliedro convexo:**

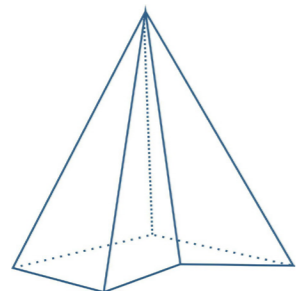
Así como un polígono convexo es aquel en el que, dados dos puntos cualesquiera que se unan con un segmento, este segmento siempre queda en el interior del polígono, para el poliedro podríamos decir lo mismo.

Esto es, un poliedro es convexo si todo segmento que une dos puntos cualesquiera interiores al poliedro queda contenido dentro del poliedro. Otra forma alternativa de definirlo es la siguiente. Un poliedro es convexo si por tres puntos no alineados de cualquiera de sus caras se traza un plano, el poliedro queda totalmente en uno de los semiespacios y en el plano trazado. Esto, en pocas palabras, es lo mismo que decir que si se apoya cualquier cara de un poliedro convexo en una superficie plana, el resto del poliedro no tocará ni traspasará dicha superficie plana (por ejemplo, puedo apoyar todas sus caras completas sin problemas en una mesa).



**Poliedro cóncavo**

Podemos definir de forma sencilla a un poliedro cóncavo como todo poliedro que no es convexo. Estos poliedros, así como los polígonos convexos, suelen ser poco comunes.



**LOS POLIEDROS REGULARES**

Un poliedro es regular cuando todas sus caras son polígonos iguales y regulares.

Solo hay 5 poliedros regulares y se denominan sólidos platónicos.

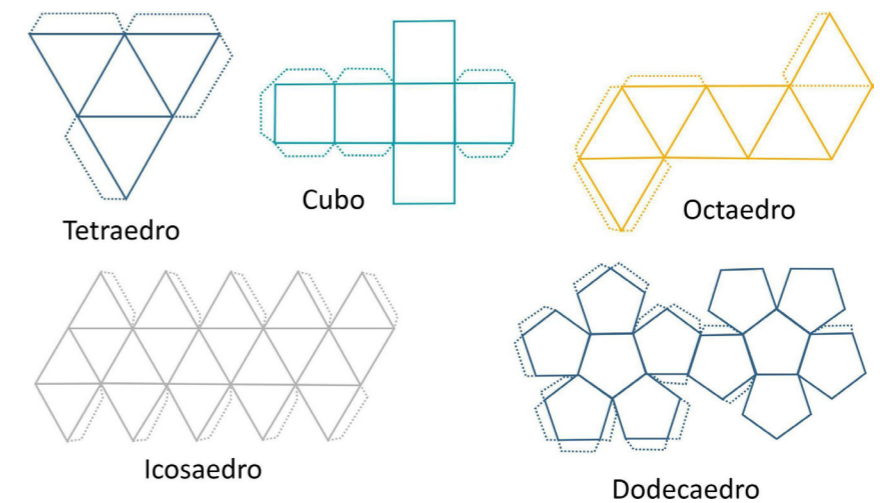


Hay 3 poliedros regulares con sus caras formadas por triángulos equiláteros.

Los otros dos poliedros tienen las caras formadas por cuadrados o por pentágonos:



Desplegando a los sólidos platónicos en sus caras, obtenemos:



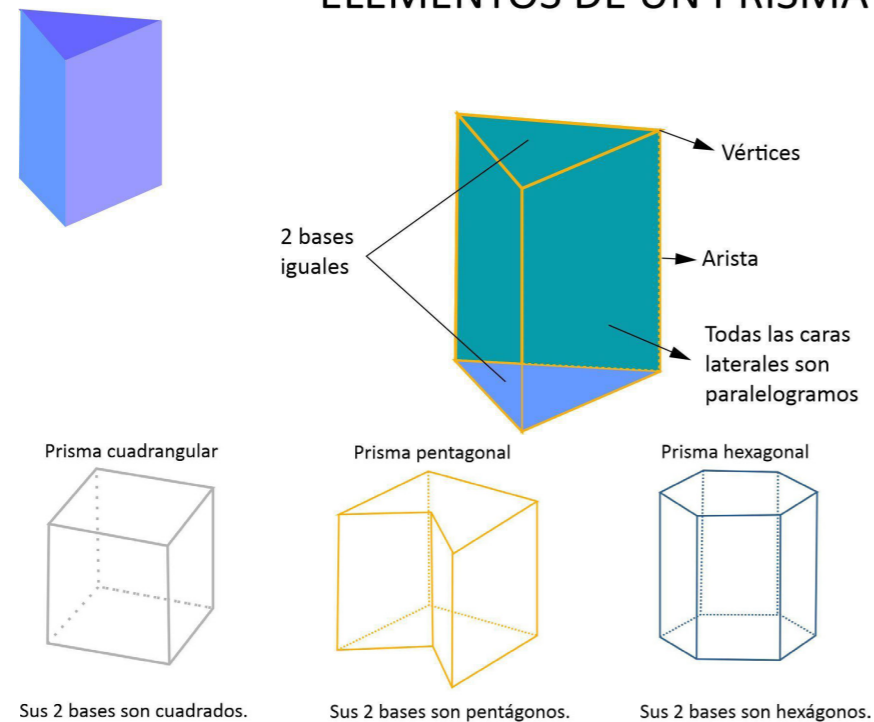
## POLIEDROS MÁS COMUNES

### Prismas

Los prismas son un tipo de poliedros bastante conocidos y utilizados. En geometría, un prisma es un poliedro con una base poligonal de  $n$  lados, una copia de traslación (esto es un polígono igual desplazado respecto a este y situado en otro plano), y otras  $n$  caras (todas necesariamente deben ser paralelogramos) que unen los lados correspondientes de las dos bases. Todas las secciones transversales paralelas a las caras de la base son iguales. Los prismas se nombran por la forma de su base, por lo que un prisma de base pentagonal se llama prisma pentagonal. Cabe aclarar que las paredes generalmente son rectángulos o cuadrados, que son casos particulares del paralelogramo. El prisma tiene la ventaja de ser una figura simple de construir y simple de calcular, ya que su volumen es igual al producto del área de su base por su altura.

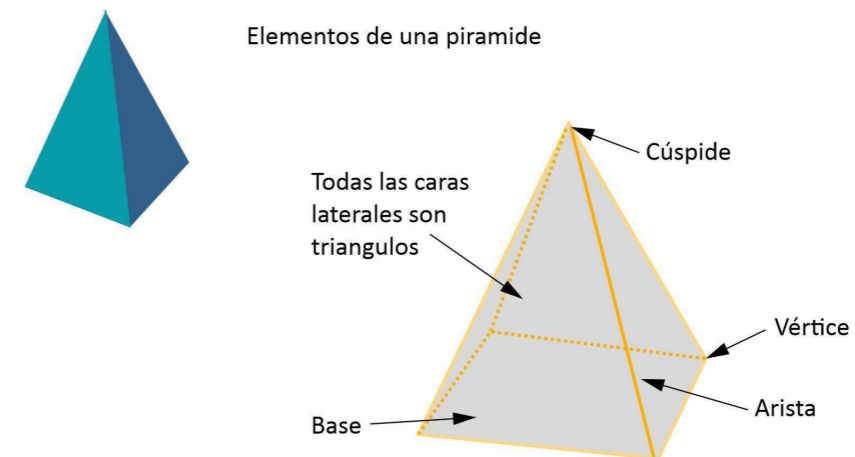
- Los prismas se nombran por el polígono de sus bases.
- Sus vértices son los del polígono de la base por dos.
- Sus aristas son las del polígono de la base por tres.

### ELEMENTOS DE UN PRISMA



### Las pirámides

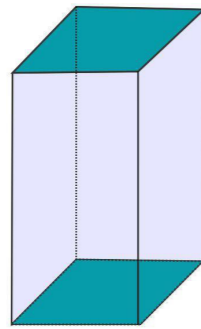
Las pirámides son poliedros con una sola base formada por un polígono cualquiera, y con caras laterales que son triángulos. Se nombran por el polígono de su base. La pirámide es otro poliedro común y simple de construir. En este caso, en lugar de conectar dos polígonos iguales con paredes rectangulares (paralelogramos, para ser precisos), lo que hacemos es conectar un polígono cualquiera de  $n$  lados con un punto que se encuentra fuera de su plano. La pirámide, entonces, es un poliedro constituido por un polígono simple (llamado base) y triángulos que tienen un único lado que coincide con uno del polígono base. Todos los triángulos tienen un vértice común llamado vértice de la pirámide. Los triángulos se llaman caras laterales. Al igual que con los prismas, a las pirámides se las nombra por la forma de su base.



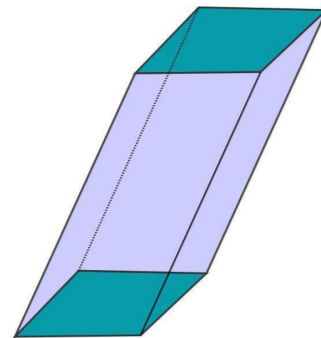
Es una pirámide cuadrangular porque el polígono de su base es un cuadrado. Sus vértices son los del polígono de la base y la cúspide.

### Paralelepípedos u Ortoedros

Los paralelepípedos son prismas cuyas caras son cuadrados o rectángulos. Tienen 6 caras, 12 aristas y 8 vértices. El prisma cuadrangular es un paralelepípedo:



Paralelepípedo recto



Paralelepípedo oblicuo

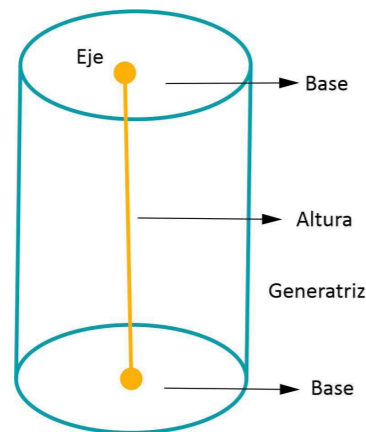
### Cuerpos redondos

Son cuerpos geométricos donde al menos una de sus caras es curva.

Los principales son :

#### Cilindro

Un cilindro se puede generar haciendo girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.



Los círculos que se obtienen al girar el otro lado son las bases del cilindro. El lado del rectángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la altura del cilindro.

#### Elementos de un cilindro

**Eje:** es el segmento fijo alrededor del cual gira el rectángulo.

**Generatriz:** es el segmento opuesto al eje, y es el segmento que engendra al cilindro.

**Bases:** son los círculos que engendran los lados perpendiculares al



eje.

**Altura:** es la distancia entre las dos bases. Esta distancia es igual a la generatriz.

#### Cono

Un cono se puede generar haciendo girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

El círculo que se obtiene al girar el otro cateto es la base del cono.

El lado del triángulo que nos sirve como eje de giro coincide con la altura del cono. La hipotenusa del triángulo rectángulo mide lo mismo que la generatriz del cono.

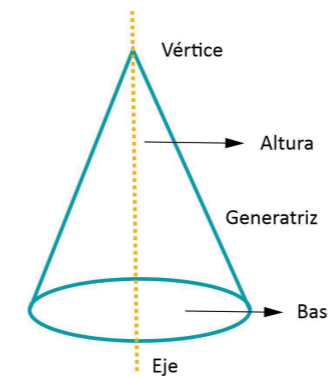
#### Elementos de un Cono

**Eje:** es el cateto fijo alrededor del cual gira el triángulo.

**Generatriz:** es la hipotenusa del triángulo rectángulo.

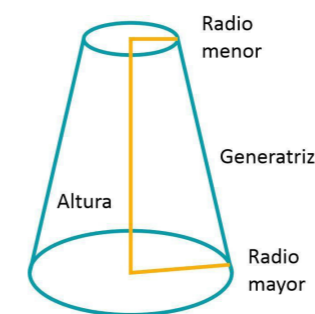
**Bases:** es el círculo que genera a en la rotación el otro cateto.

**Altura:** es la distancia entre las dos bases. Esta distancia es igual a la generatriz.



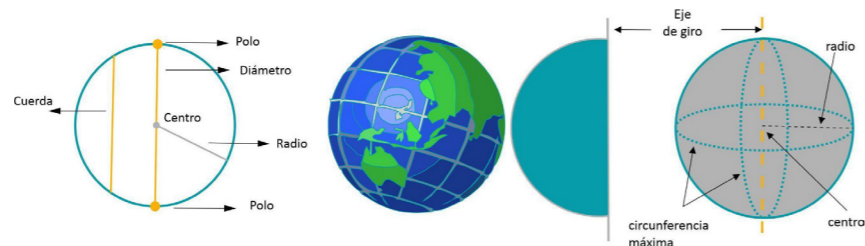
Un caso particular es el tronco de cono:

Resulta de cortar al cono con un plano paralelo a la base y apartar la parte que contiene al vértice. La sección determinada por el corte se la denomina base menor.



### Esfera

Es la región del espacio que se encuentra en el interior de una superficie esférica. Una esfera se puede generar haciendo que un semicírculo gire alrededor de su diámetro. El radio del semicírculo es el radio de la esfera.



### Elementos de la esfera

**Centro:** punto interior que equidista de cualquier punto de la superficie esférica.

**Radio:** distancia del centro a un punto de la superficie esférica.

**Cuerda:** distancia que une dos puntos de la superficie.

**Diámetro:** cuerda que pasa por el centro.

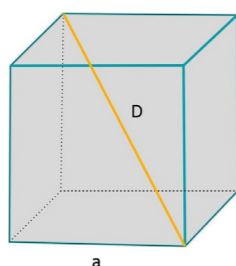
**Polo:** son los puntos del eje de giro que quedan sobre la superficie esférica.

### Áreas y Volúmenes de cuerpos en el espacio

#### Superficie de poliedros

La superficie de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras. Calcular la superficie de un poliedro es simple, puesto que solo hay que reducirlo a calcular las áreas de los polígonos que forman sus caras y sumar. El volumen de un cuerpo geométrico representa lo que ocupa en el espacio. Asociado a este concepto está el de capacidad de un cuerpo, que es lo que puede contener. En Matemática, muchas veces se confunden estos dos conceptos, dado que las "paredes" del cuerpo se suponen sin grosor.

#### Área y volumen de un cubo

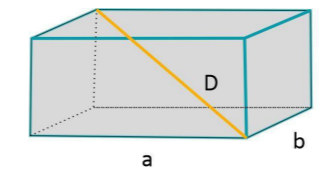


$$A_{lateral} = 4a^2$$

$$A_{total} \text{ (incluye base y techo)} = 6a^2$$

$$V = a^3$$

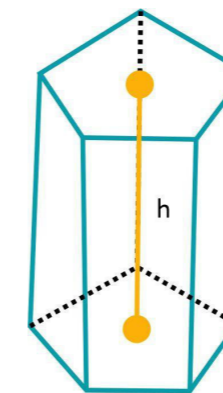
#### Área y volumen de un paralelepípedo



$$A_{total} \text{ (incluye base y techo)} = 2 \cdot (ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

#### Área y volumen de un prisma

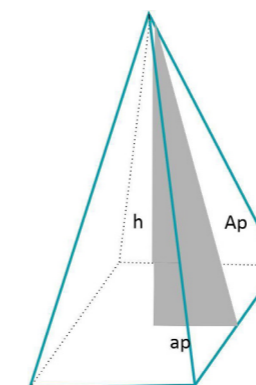


$$A_{lateral} = \text{Perímetro de base} \cdot h$$

$$A_{total} \text{ (incluye base y techo)} = A_{lateral} + 2 \text{ area de base}$$

$$V = A_{base} \cdot h$$

#### Área y volumen de la pirámide



$$P_B = \text{Perímetro de la base}$$

$$A_p = \text{Apotema de la pirámide}$$

$$a_p = \text{apotema de la base}$$

$$A_{lateral} = \frac{P_B \cdot A_p}{2}$$

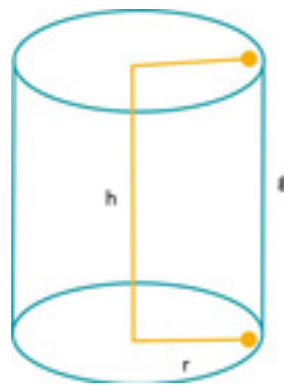


## Área y volumen del cilindro

### Volumen del cilindro

El volumen del cilindro se calcula como el producto del área de su base (que es un círculo) por su altura. Si el radio de la base es  $r$  y la altura es  $h$ , nos queda Volumen cilindro =  $\pi r^2 h$ . El desarrollo del cilindro consta de 2 círculos y un rectángulo. La altura del rectángulo ( $h$ ) es la altura del cilindro y como el rectángulo se tiene que enrollar alrededor de la base del cilindro, su base tiene que medir lo mismo que la correspondiente circunferencia. Ese valor es, siendo  $r$  el radio de la base del cilindro. Así, el área del rectángulo. Por otra parte, cada una de las bases tiene área, y tiene dos bases.

Así: Superficie del cilindro =  $2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

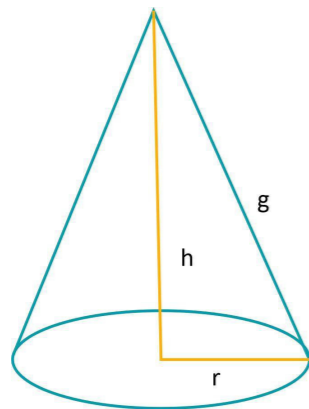


$$A_L = 2\pi r h$$

$$A_T = 2\pi r(h + r)$$

$$V = \pi r^2 h$$

### Área y volumen del cono



$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$A_L = \pi r g$$

$$A_T = \pi r(g + r)$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

El volumen de un cono equivale a un tercio del volumen del cilindro que tiene la misma base y la misma altura.

Así, para un cono cuyo radio de la base es  $r$  y su altura es  $h$  se tiene que Volumen cono =  $\frac{\pi r^2 h}{3}$

### Superficie del cono

Siguiendo la misma idea anterior, para calcular la superficie de un cono, sumaremos las áreas de las dos piezas que componen su desarrollo: un círculo y un sector circular.

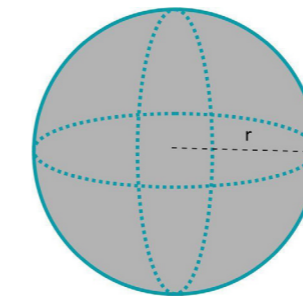
Si la base del cono es un círculo de radio  $r$ , la longitud de la correspondiente circunferencia es  $2\pi r$  y la parte curva del sector circular en el desarrollo del cono debe enrollarse sobre esa circunferencia. Luego, la medida de esa línea curva es  $2\pi r$ .

Para calcular el área del sector circular haremos una regla de tres, teniendo en cuenta que el radio de ese sector circular es la generatriz del cono: si a una longitud de  $2\pi g$  (circunferencia completa) le corresponde un área de  $\pi g^2$ , a una longitud de  $2\pi r$  le corresponderá  $\frac{2\pi r \cdot \pi g^2}{2\pi g} = \pi r g$

La base del cono es un círculo de radio  $r$ , cuyo área es  $\pi r^2$ .

Así, tenemos que Superficie del cono = Área del sector circular + Área del círculo =  $\pi r g + \pi r^2$

### Área y superficie de la esfera



$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Al no tener un desarrollo plano, trabajar con la esfera es más difícil y se requieren técnicas matemáticas más complejas.

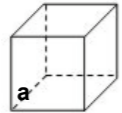
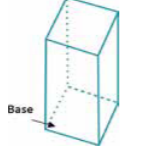
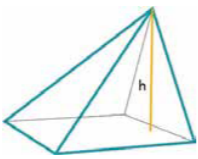
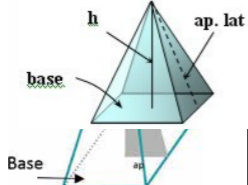
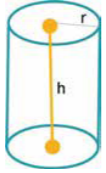
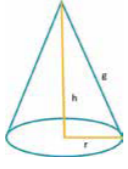
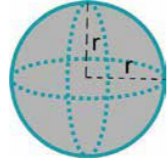
Simplemente por completar lo expuesto en este tema, damos la fórmula que permite calcular el volumen de la esfera en función de su radio  $r$ . Volumen de la esfera =  $\frac{4}{3}\pi r^3$

No podemos calcular la superficie de la esfera mediante su desarrollo, ya que solo se podría obtener de forma aproximada. Sin em-



bargo, hay diferentes métodos (más avanzados) que permiten calcularlo. Superficie de la esfera de radio  $r$  es igual a  $4\pi r^2$

**Resumen de fórmulas de los cuerpos geométricos**

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cubo		$A_L = 4 a^2$ $A_T = a^2$ $= 6 a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A_L = P_B \cdot h$ $A_T = A_L + 2 A_B$	$V = A_B \cdot h$
Pirámide		$A_L = \sum A_{CARAS}$ $A_T = A_L + A_B$	$HV = \frac{A}{3}$
Pirámide regular		$A_L = \frac{P \cdot ap. lat}{2}$ $A_T = \frac{P(A + a)}{2}$	$V = \frac{A \cdot h}{3}$
Cilindro		$A_L = 2 \pi \cdot r \cdot h$ $A_T = 2 A_B = 2 \pi \cdot r \cdot (h + r)$	$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Cono		$A_L = \pi \cdot r \cdot g$ $A_T = A_L + A_B = \pi \cdot r \cdot (g + r)$	$V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Esfera		$A = 4 \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$



# Guía de ejercicios

## Polígonos y Poliedros

### Ejercicio Nro 1

A partir de los datos de cada polígono, calcular el perímetro y la superficie.

Polígono regular	Lado	Apotema	Perímetro	Área
Pentágono		15		
Hexágono	10			
Octógono		40		
Eneágono	25			
Decágono		18		

### Ejercicio Nro 2

Calcular el volumen de una caja de base pentagonal regular, si su perímetro es igual a 40 cm y la altura es igual al doble de la longitud del lado del pentágono .

### Ejercicio Nro 3

Conocemos que dos polígonos tienen el mismo perímetro. De uno sabemos que es un pentágono y su lado es de 16 cm. Si el valor del lado es de 8 cm, ¿de qué polígono se trata?

### Ejercicio Nro 4

Si un octógono regular está inscripto en una circunferencia de radio igual a 3 cm.

- ¿Cuánto vale el lado de este octógono?
- ¿Cuál es el valor del lado del octógono que se encuentra circunscripto en la misma circunferencia?
- Hallar el área de ambos polígonos.

### Ejercicio Nro 5

La imagen corresponde a una caja octogonal de chapa para embutir. En la vista superior se pueden observar dos octógonos inscriptos en dos circunferencias. Si las circunferencias tienen 9 cm y 16 cm de radio, ¿cuánto miden los lados de los octógonos?



### Ejercicio Nro 6

La figura muestra un domo geodésico realizado en madera reciclada por el Laboratorio de Economía Circular de la Universidad Nacional de Rafaela ubicado en la localidad de Marcos Paz, provincia de Buenos Aires.

Este domo está generado a partir de triángulos regulares que conforman un hexágono regular. ¿Cuál es la superficie del hexágono marcado en la figura si el diámetro de la circunferencia circunscrita es de 3,20 mn?



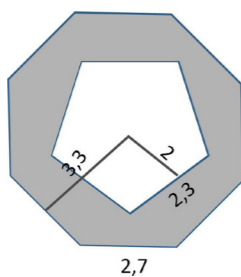
### Ejercicio Nro 7

En la intersección entre dos hexágonos se quiere colocar una placa de madera a modo de cerramiento, tal como se muestra en la figura. Calcular la superficie de este panel si sabemos que el lado del hexágono es de 12,12 cm.



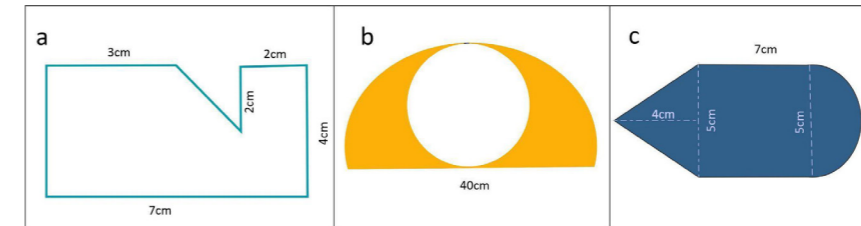
### Ejercicio Nro 8

Calcule el área de la figura sombreada.



### Ejercicio Nro 9

Calcular el perímetro y el área de las figuras.



### Ejercicio Nro 10

- Calcular la diagonal de un octaedro de lados 8, 3 y 5 cm.
- Si en una pirámide pentagonal regular su apotema mide 10 cm y el lado de su base 4 cm, ¿cuánto mide su arista?
- ¿Cuánto mide la arista lateral de una pirámide pentagonal regular cuya altura mide 5 m, y cuya base está inscrita en una circunferencia de 2 m de radio?
- Calcula el volumen de un cono de generatriz de 8 cm y radio de la base 3 cm.
- Calcula la superficie lateral y total de un prisma regular hexagonal de altura 12 cm y lado de la base 6 cm.
- Un cilindro recto tiene una superficie lateral de  $67\pi$  cm<sup>2</sup>. ¿Cuánto mide su superficie total si su altura mide 10 cm?
- Calcula el radio de la esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 cm.
- Si llenas de arena un cono recto de 7 cm de altura y de radio de la base de 4 cm, y lo vacías en un cilindro recto de 4 cm de radio de la base, ¿qué altura alcanzará la arena?
- Calcula el volumen y la superficie de una esfera inscrita y circunscrita a un cubo de lado 10 m.
- Calcula la superficie lateral y total de un cilindro recto ge-

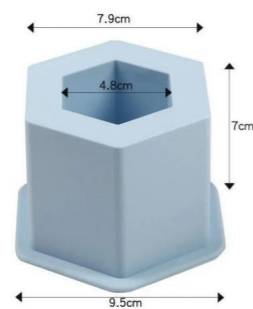


nerado por un rectángulo de lados 3 y 8 cm al girar alrededor de su lado mayor.

- k. Calcula la superficie lateral y total de un cono recto generado por un triángulo rectángulo de catetos 3 y 8 cm al girar alrededor de su cateto menor.
- l. Duplicamos la arista de un cubo, ¿qué ocurre con la superficie de una cara? ¿Y con su volumen? Calcular suponiendo que duplicas la arista de un cubo de lado 5 m.
- m. Un depósito cilíndrico tiene una capacidad de 100 L y una altura de 100 cm, ¿cuánto mide el radio de su base?

**Ejercicio Nro 11**

Calcular la cantidad de silicona para realizar el siguiente molde (sin tener en cuenta la base del molde).



sabiendo que el espesor es igual a 0,2cm

**Ejercicio Nro 12**

Halla la generatriz de un cono, sabiendo que su altura es de 8 cm y que la longitud de la base es de 18,84 cm.

**Ejercicio Nro 13**

Un colador de pasta en forma de pirámide de base redonda debe contener 3 litros. Si la altura es de 18 cm, ¿cuál es el diámetro del colador?



$V=1000\text{cm}^3$

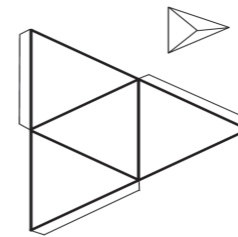


**Ejercicio Nro 14**

Un cilindro tiene una altura de 36 cm y un radio de 10 cm. Hallar el radio de un cono que tenga el mismo volumen que el cilindro y el doble de su altura.

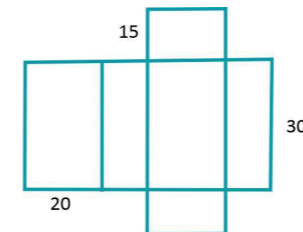
**Ejercicio Nro 15**

Se tiene un cartón cuya forma es un triángulo equilátero de 32 cm de lado. Se pliega en sus tres vértices para formar un tetraedro regular. Hallar el volumen del tetraedro.



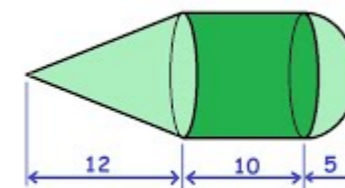
**Ejercicio Nro 16**

La caja de cartón que se puede construir a partir de la imagen ¿sirve para contener  $10000\text{ cm}^3$  .?



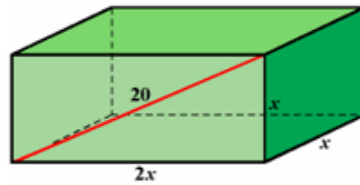
**Ejercicio Nro 17**

¿Cuántos  $\text{cm}^3$  de bronce son necesarios para realizar la siguiente pieza que pertenece a una máquina?



### Ejercicio Nro 18

Una caja de galletas con forma de paralelepípedo mide lo mismo de largo que de alto y su ancho es doble que el largo. Si la diagonal de una de sus caras más grandes mide 20 cm, encuentra la cantidad de cartón necesaria para su construcción.



### Ejercicio Nro 19

Una bola de espejos tiene un diámetro de 48 cm. Se la quiere recubrir con espejos de forma hexagonal de 1cm de lado. ¿Cuántos espejos serán necesarios?



### Ejercicio Nro 20

Hallar el volumen y la superficie de una esfera en la que un plano que la corta, pasando por su centro, produce una sección de 1.256 cm<sup>2</sup> de área.

### Ejercicio Nro 21

Se desea construir una carpa piramidal de base hexagonal. La carpa requiere una altura de 1,20 m. Por ello, la medida del lado de la base es de 0,9 m y la longitud de la arista lateral mide 1,5 m. ¿Cuánta tela se necesita para cubrir la base de la pirámide? ¿Cuál es el volumen de la pirámide? ¿Cuál es el área total de la pirámide?



La figura es una variación del cubo mágico de Rubik formada por triángulos equiláteros. Si cada triángulo mide 2,5 cm de lado, ¿cuál es la altura de la pirámide?

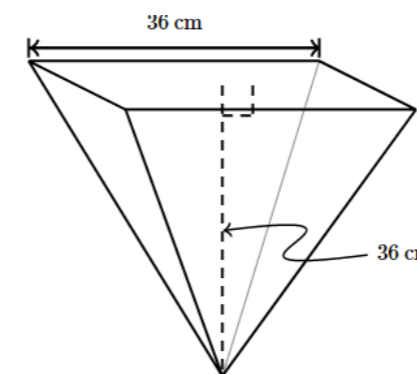


### Ejercicio Nro 23

Una compañía de helados vende sus productos en un recipiente cilíndrico de 16cm de altura por cm de diámetro. Piensan cambiar a un nuevo recipiente en forma de prisma rectangular cuya base es de 20cm × 13cm. Quieren que el nuevo recipiente tenga el mismo volumen que el anterior. ¿Cuál debe ser la altura del nuevo recipiente?

### Ejercicio Nro 24

Se tiene una maceta en forma de pirámide invertida. La base es cuadrada de 36 cm y la altura es 36 cm. Se quiere llenar la maceta con tierra para que ocupe el 75% del volumen. ¿Hasta qué altura llegará la tierra?



# 04.

## Cónicas

### Resumen

En esta sección presentaremos a las curvas denominadas cónicas o ecuaciones completas de segundo grado en dos variables, sus propiedades fundamentales y algunos casos interesantes y útiles en el diseño.



### Las cónicas - Introducción

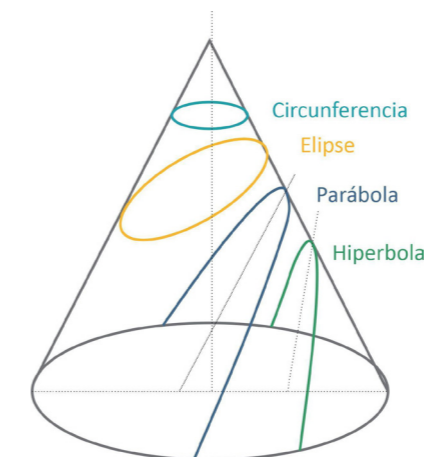
Las cónicas son un conjunto de curvas algebraicas en geometría analítica que tienen gran importancia, tanto en la Matemática como en la Física.

Estas curvas tienen propiedades geométricas y algebraicas muy importantes. Su estudio es fundamental en áreas como la Física, la Astronomía, la Óptica, la Ingeniería, y también en el Diseño. Las cónicas se utilizan para modelar movimientos, trayectorias, lentes y muchos otros fenómenos naturales y aplicaciones prácticas. Para el Diseño industrial, la comprensión de estas presenta un importante recurso. Son curvas de segundo grado que se obtienen al cortar un cono recto de revolución de dos ramas por planos que lo cortan con diferentes ángulos de incidencia.

Estas secciones cónicas son obtenidas a partir de la intersección de un plano que corta a un cono recto circular doble.

Según cómo sea el ángulo del plano con respecto al cono, se pueden producir diferentes tipos de cónicas.

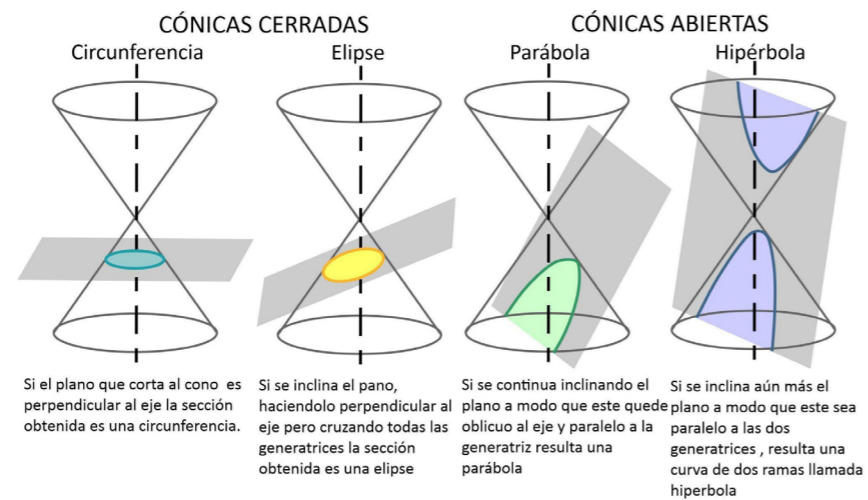
Hay cuatro tipos básicos: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Ninguna de las intersecciones pasa a través de los vértices del cono.



- Si el cono recto circular es cortado por un plano perpendicular al eje del cono, la intersección es una circunferencia.
- Si el plano intersecta una de las piezas del cono y su eje, pero este no es perpendicular al eje, la intersección será una elipse.
- Para generar una hipérbola, el plano intersecta ambas piezas del cono sin intersectar el eje.
- Y finalmente, para generar una parábola, el plano de intersección debe intersectar una pieza del cono doble y su base.

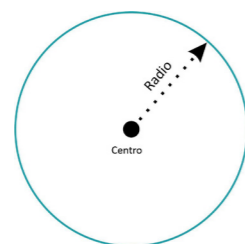
### Cónicas abiertas y cónicas cerradas

Distinguimos estas clases de cónicas según la intersección del plano con la superficie cónica, se trate de una curva abierta o una curva cerrada.



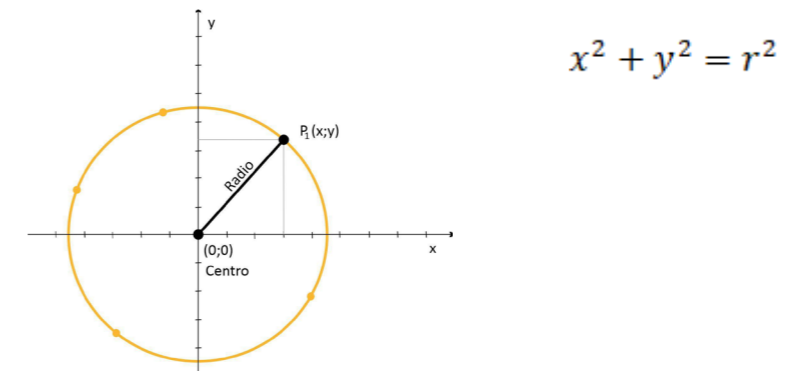
### Circunferencia

La circunferencia es el lugar geométrico en el plano de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

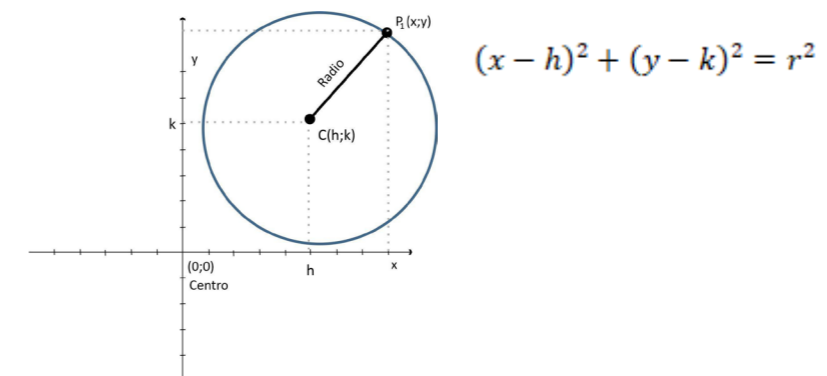


### Ecuación de la circunferencia

Para hallar la ecuación de la circunferencia la llevamos a sistema cartesiano de ejes x y, en principio, el centro de la circunferencia lo hacemos coincidir con el centro del sistema. Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo, sabemos que:



Normalmente, si el centro de la circunferencia lo tenemos en un punto P(h,k), aplicamos Teorema de Pitágoras y nos queda:



### Ejemplo 1

Ecuación de la circunferencia que tiene centro en C(-2,6) y radio r=4

$$(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 16$$

### Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la circunferencia, que tiene centro en P(3,2) y el punto Q(6,6) pertenece a la circunferencia.

Hallar la medida del radio.

Primero planteamos la ecuación de la circunferencia teniendo como dato el centro :  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = r^2$

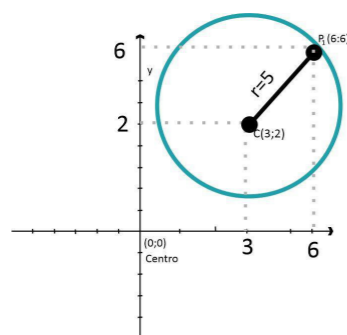
Como el punto Q(6,6) pertenece a la circunferencia, entonces debe hacer verificar la ecuación.

Reemplazando:

$$\begin{aligned}(6 - 3)^2 + (6 - 2)^2 &= r^2 \\ 3^2 + 4^2 &= r^2 \\ 9 + 16 &= r^2 \\ 25 &= r^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio de la circunferencia es  $r=5$  y la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$$



### Ejemplo 3

Ecuación de la circunferencia que tiene centro en C(4,2) y el punto P(-5,3) pertenece a la circunferencia.

Planteamos la fórmula  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = r^2$

Para averiguar el radio, reemplazamos e por el punto de paso:

$$\begin{aligned}(-5 - 4)^2 + (3 - 2)^2 &= r^2 \\ (-9)^2 + 1^2 &= r^2 \\ r^2 &= 82 \\ (x - 4)^2 + (y - 2)^2 &= 82\end{aligned}$$

Forma desarrollada de la ecuación de la circunferencia

Si consideramos la ecuación de la circunferencia  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ , llamada ecuación canónica.

Y desarrollando los cuadrados  $x^2 - 2x \cdot x_0 + x_0^2 + y^2 - 2y \cdot y_0 + y_0^2 = r^2$

Agrupando  $x^2 + y^2 - 2x_0 \cdot x - 2y_0 \cdot y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$  (Ecuación desarrollada de la circunferencia), nos queda una ecuación de segundo grado en dos variables.

Ecuación de la forma  $x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde

$$A = C, \quad B = 0 \quad D = -2x_0 \quad E = -2y_0 \quad F = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

Ejemplo

Dada la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$

Hallar la circunferencia concéntrica a la dada de radio = 8.

La circunferencia concéntrica que pasa por P(2,2).

A partir de la ecuación desarrollada  $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$ , agrupamos los términos que contiene por un lado, y por el otro, y realizamos el proceso de "completar cuadrados":

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$$

$$y^2 + 10y = (y + 5)^2 - 25$$

Y reemplazamos:

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 5)^2 - 25 + 25 = 0$$

Por lo que queda  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 4$ , por lo tanto, se trata de una circunferencia con centro en C(2, -5) y radio  $r = 2$

La circunferencia concéntrica de

$r = 8$ , es  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 64$

Para hallar la circunferencia concéntrica que pasa por el punto P(2,2) será:

$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = r^2$ , reemplazamos (x, y) por P(2,2):

Quedando  $(2 - 2)^2 + (2 + 5)^2 = r^2$ , por lo que  $49 = r^2$

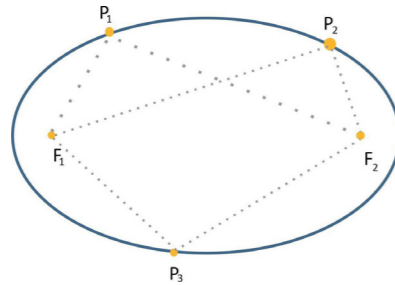
y la ecuación queda:  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 64$



## La elipse

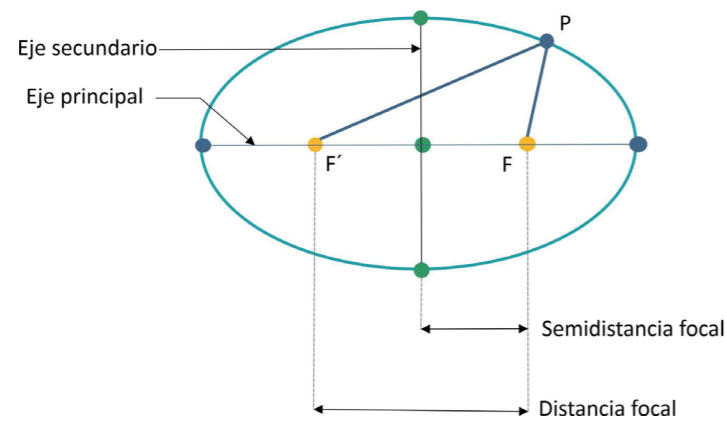
Lugar geométrico de los puntos de un plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante y equivalente al valor del eje mayor.

Los dos puntos fijos se llaman focos.

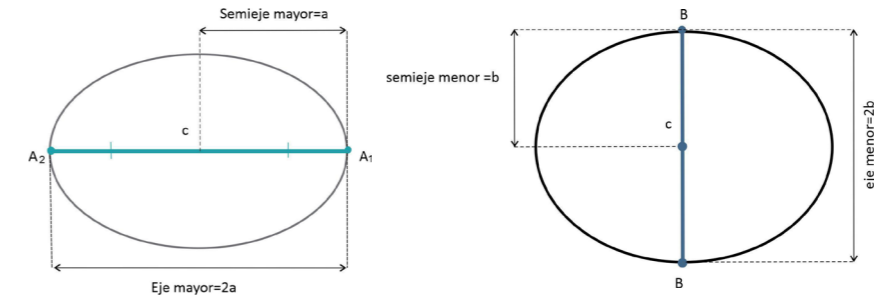


Para la construcción manual, se toma un segmento de longitud  $2a$  y se sujetan los extremos en los puntos  $F$  y  $F'$  (focos), se mantiene el segmento tirante, se va girando y se obtiene el gráfico de la elipse.

Así, los elementos de una elipse son:



- Focos:** son los puntos fijos  $F$  y  $F'$  (puntos de color lila en la imagen de abajo). La suma de las distancias desde un punto cualquiera de la elipse hasta cada foco es constante para todos los puntos de la elipse.
- Eje principal o focal:** Es el eje de simetría de la elipse en el que se encuentran los focos. También se denomina eje mayor.
- Semieje mayor o principal:** Es el segmento que va desde el centro de la elipse hasta los vértices del eje principal.



### Eje secundario

Es el eje de simetría de la elipse perpendicular al eje principal. También se dice eje menor y corresponde a la mediatriz del segmento que une los focos.

### Semieje menor o secundario

Es el segmento entre el centro de la elipse y los vértices del eje secundario.

#### a. Centro

Es el punto donde se cortan los ejes de la elipse. Además, es el centro de simetría de la elipse.

#### b. Vértices

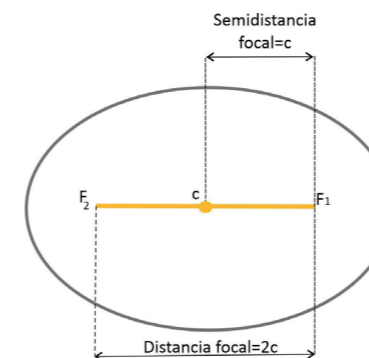
Son los puntos de intersección de la elipse con sus ejes de simetría.

#### c. Distancia focal

Es la distancia entre los dos focos.

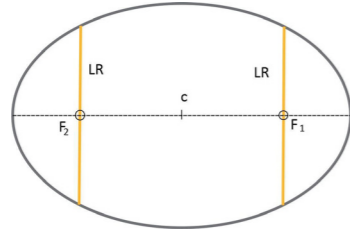
#### d. Semidistancia focal

Corresponde a la distancia que hay entre el centro y cada uno de los focos.



### Lado recto

El lado recto de una elipse se define como un segmento de recta perpendicular al eje mayor, que contiene a cualquiera de los dos focos y sus extremos se localizan sobre la elipse.

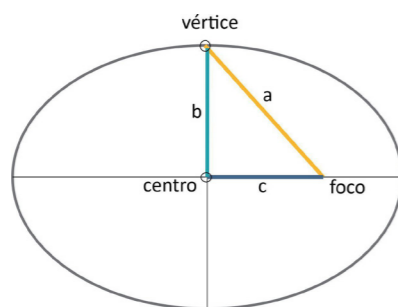


### Relación entre los elementos de una elipse

Los diferentes elementos de una elipse están relacionados entre sí. Además, las relaciones que hay entre ellos son muy importantes para los ejercicios de elipses, ya que se suelen necesitar para resolver los problemas de elipses y determinar sus ecuaciones.

Como hemos visto más arriba en la definición de la elipse, la distancia de cualquier punto de la elipse al foco F más la distancia del mismo punto al foco F' es constante.

Ese valor constante es igual al doble de lo que mide el semieje mayor. O, dicho de otra forma, la siguiente igualdad se cumple para cualquier punto de una elipse:  $d(P, F) + d(P, F') = 2a$



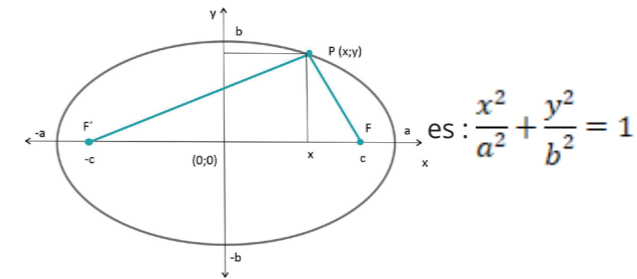
Donde  $d(P, F)$  y  $d(P, F')$  es la distancia del punto P al foco F y F', respectivamente, donde además es la longitud del semieje focal.

Por lo tanto, como el vértice del eje secundario está justo en la mitad del eje focal, la distancia desde este hasta uno de los focos es equivalente a la longitud del semieje principal (a).

Por tanto, a partir del teorema de Pitágoras, se puede encontrar la relación que existe entre el semieje principal, el semieje secundario y la semidistancia focal:  $a^2 = b^2 + c^2$

### Ecuación reducida de la elipse

La ecuación reducida de una elipse cuando los focos están situados en el eje x y  $d(P, F) + d(P, F') = 2a$



Donde: a: semieje mayor, b: semieje menor

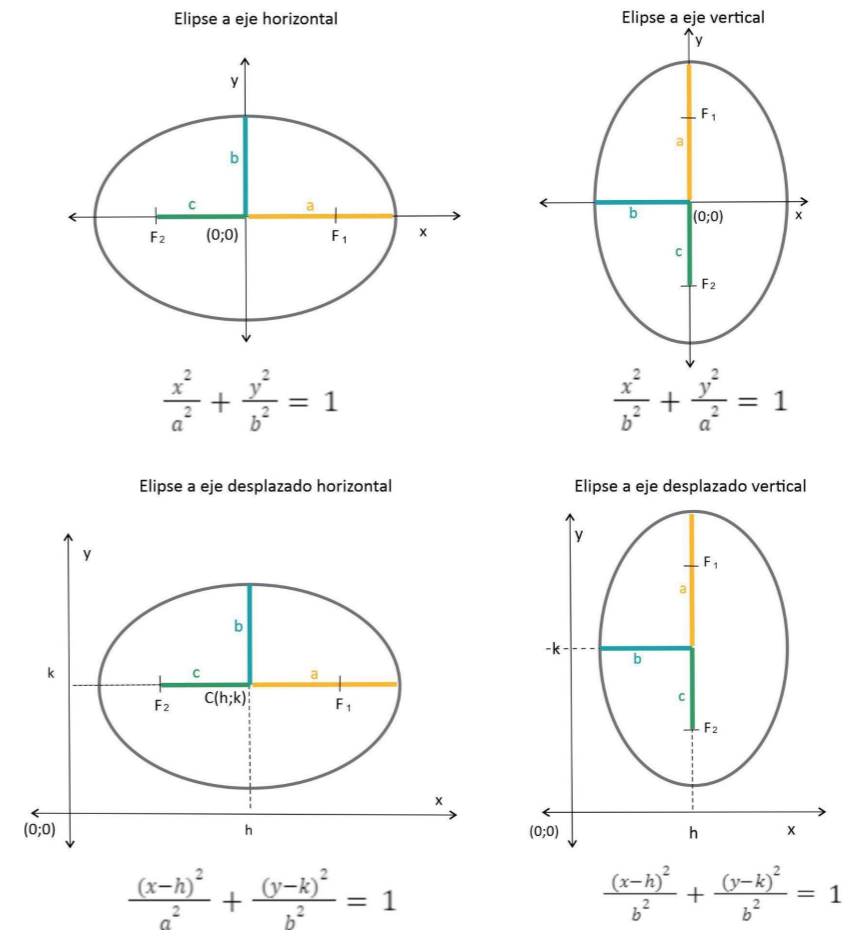
Los focos se encuentran en  $F(c, 0)$  y  $F(-c, 0)$

Vértices en  $A(a, 0)$ ,  $A'(-a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,  $B'(0, -b)$

En el gráfico  $BF = a$ , luego por el Teorema de Pitágoras  $a^2 = b^2 + c^2$



### ECUACIONES DE LA ELIPSE



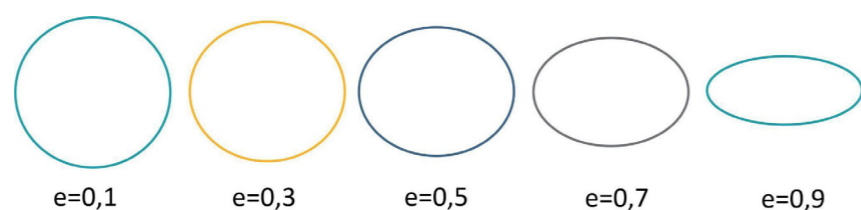
### Excentricidad de la elipse

Evidentemente, no todas las elipses son iguales, sino que unas son más alargadas y otras más achatadas. Así, existe un coeficiente que sirve para medir cuán redondeada está una determinada elipse.

Este coeficiente se llama excentricidad y se calcula con la siguiente fórmula:  $e = \frac{c}{a}$

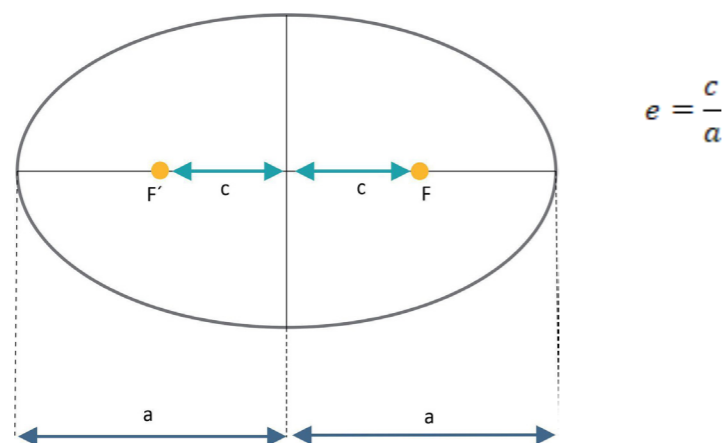
Por lo tanto,  $0 < e < 1$

Donde  $c$  es la distancia del centro de la elipse a uno de sus focos y  $a$  la longitud del semieje principal.



Como puedes ver en la representación anterior, cuanto más pequeño es el valor de la excentricidad de la elipse más se parece a una circunferencia; por el contrario, cuanto más grande es el coeficiente, más aplanada es la elipse. Además, el valor de la excentricidad va desde cero (circunferencia perfecta) hasta uno (línea horizontal), ambos no incluidos.

La excentricidad ( $e$ ) de una elipse es la razón entre su semidistancia focal (longitud del segmento que parte del centro de la elipse y acaba en uno de sus focos), denominada por la letra  $c$ , y su semieje mayor. Su valor se encuentra entre cero y uno.



### Ejemplos de cómo calcular la ecuación de la elipse

#### Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la elipse cuyo semieje principal mide 5 unidades (y es paralelo al eje OX), su centro es el punto  $C(4,-1)$  y la distancia desde su centro hasta un foco es de 4 unidades.

Para determinar la ecuación de cualquier elipse necesitamos la longitud del semieje principal, la longitud del semieje secundario y las coordenadas de su punto. Por tanto, en este caso solo nos falta por conocer el semieje secundario.

Así, para calcular cuánto mide el semieje secundario, podemos usar la relación entre el semieje principal, el semieje secundario y la semidistancia focal:

Sabemos que  $a^2 = b^2 + c^2$ , por lo tanto  $b^2 = a^2 - c^2$

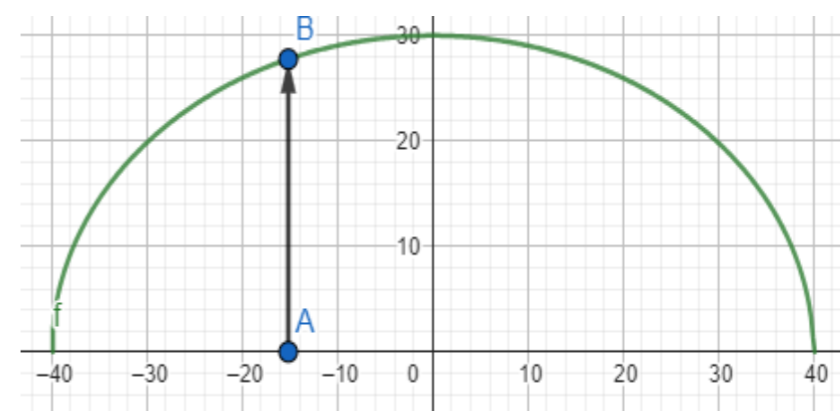
$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

Una vez que conocemos la distancias de los dos semiejes y el centro de la elipse, hallamos su ecuación :

$$\frac{(x-4)^2}{5^2} + \frac{(y-(-1))}{3^2} = 1 \quad , \text{ operando } \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

#### Ejemplo 2

Un arco de 80 m de luz tiene forma semiéptica. Su altura es de 30 m. Calcular la altura del arco en un punto situado a 15 m del centro .



La elipse tiene como ecuación  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ,

pero  $a^2 = 1600$  y  $b^2 = 900$

Quedando  $\frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{900} = 1$ , tomando  $x = 15$

queda  $\frac{15^2}{1600} + \frac{y^2}{900} = 1$

Despejando  $\frac{y^2}{900} = 1 - \frac{15^2}{1600}, y = \sqrt{900(1 - \frac{225}{1600})} \Rightarrow y = 27,8$

### Ejemplo 3

Representa gráficamente y determina las coordenadas de los focos, de los vértices y la excentricidad de la siguiente elipse  $x^2 + 4y^2 = 16$

Obtenemos la ecuación canónica  $x^2 + 4y^2 = 16$ , dividiendo por

$$16 \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Eje mayor ( el semieje es  $a$  )  $a^2 = 16$ ,  $a = 4$

Y así encontrar los vértices que forman el eje mayor  $A(4,0)$ ,  $A'(-4,0)$

Eje menor: El semieje menor es  $b^2 = 4$ ,  $b = 2$

Por lo tanto, los vértices que se encuentran en el eje menor son  $B(2,0)$ ,  $B'(-2,0)$

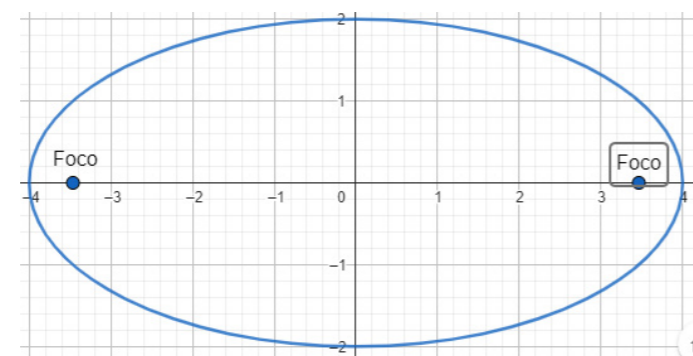
Focos: el valor de la distancia semifocal  $c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Y con este, localizar los focos  $F(2\sqrt{3}, 0)$ ,  $F'(0, -2\sqrt{3})$

Excentricidad: cociente de la distancia semifocal y el semieje mayor

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Gráfica



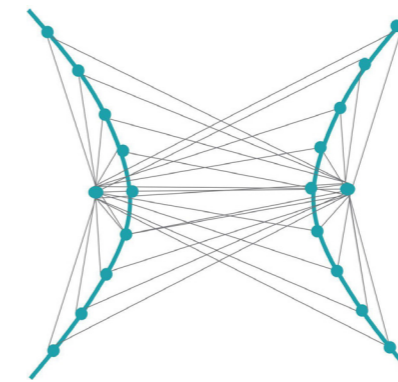
### Área y Perímetro de la elipse

$$A = \pi ab$$

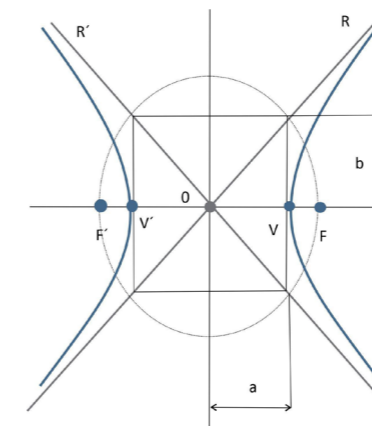
$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

### La Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante. Esta constante es igual a la distancia entre los vértices de la curva, que llamaremos



### Elementos de la hipérbola



$O$ : centro

$F$  y  $F'$ : Focos,  $V$  y  $V'$ : vértices

$a$ : semieje real o principal,  $2a$ : eje principal

$b$ : semieje imaginario,  $2b$ : eje imaginario

$c$ : semidistancia focal,  $2c$ : distancia focal

$R$  y  $R'$ : rectas asintotas: son las rectas que se intersectan en el centro de la hipérbola y se aproximan a las ramas al alejarse de dicho centro.

Sus ecuaciones pueden obtenerse si se conocen el semieje real ( $a$ ) y el semieje imaginario ( $b$ ) que determinan las pendientes de las rectas. Cuando " $a$ " es igual a " $b$ " la hipérbola se denomina equilátera y las pendientes de las asintotas serán igual a 1 y -1, respectivamente.

### Relación entre los elementos de una hipérbola

Los diferentes elementos de una hipérbola están relacionados entre sí. Además, las relaciones que hay entre ellos son muy importantes para los ejercicios de hipérbolas, ya que se suelen necesitar para resolver los problemas de elipses y determinar sus ecuaciones.

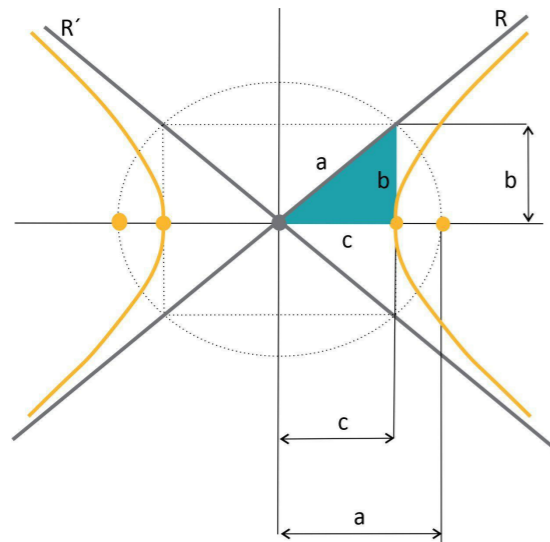
Como hemos visto más arriba en la definición de la hipérbola, la dis-



tancia de cualquier punto de la curva al foco F menos la distancia del mismo punto al foco F' es constante. Pues ese valor constante es igual al doble de lo que mide el semieje real.

O dicho de otra forma, la siguiente igualdad se cumple para cualquier punto de una elipse:  $d(P, F) - d(P, F') = 2a$

Donde  $d(P, F)$  y  $d(P, F')$  es la distancia del punto P al foco F y F', respectivamente, y es la longitud del semieje focal.



Por tanto, a partir del teorema de Pitágoras, se puede encontrar la relación que existe entre el semieje real, el semieje imaginario y la semidistancia focal:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 \\ a^2 &= c^2 - b^2 \end{aligned}$$

### Ecuación de la hipérbola

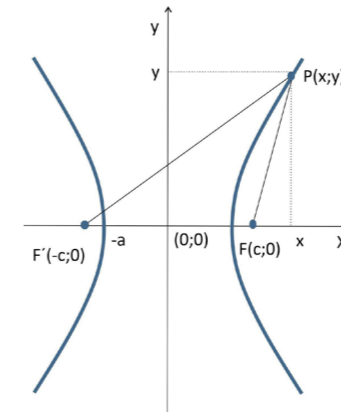
La posición de la hipérbola en el plano determinará la ecuación que le corresponde. Así, una hipérbola con eje focal coincidente con el eje de las abscisas o paralelo a este será "a eje horizontal", mientras que una hipérbola con eje focal coincidente con el eje de las ordenadas o paralelo a este será "a eje vertical".

A su vez, la hipérbola podrá tener su centro coincidente con el origen del sistema o desplazado en el plano. En este último caso, las coordenadas del centro están representadas por el par ordenado (h; k).

### Ecuación reducida de la hipérbola

#### Hipérbola de eje horizontal

La ecuación reducida de una hipérbola cuando los focos están situados en el eje x



$$y \quad d(P, F) - d(P, F') = 2a \text{ es: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

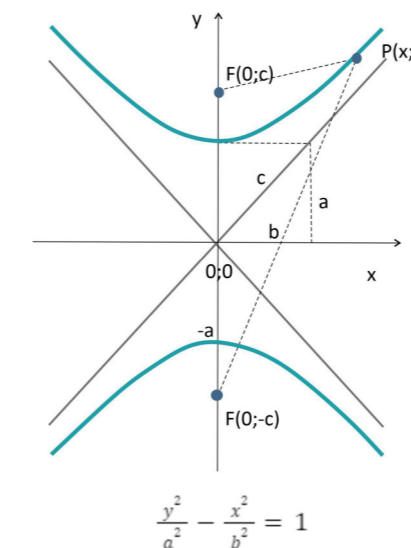
Donde: a: semieje real, b: semieje imaginario

Los focos se encuentran en  $F(c, 0)$  y  $F(-c, 0)$

Vértices en  $A(a, 0)$ ,  $A'(-a, 0)$

$$\text{Asíntotas } y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$$

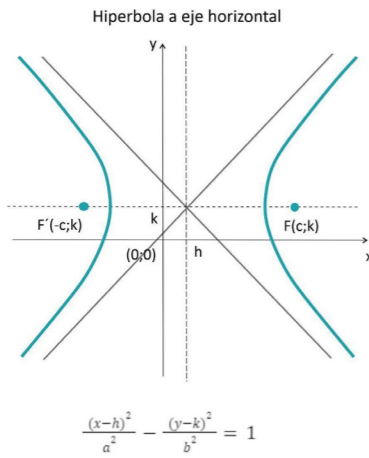
Hipérbola a eje vertical



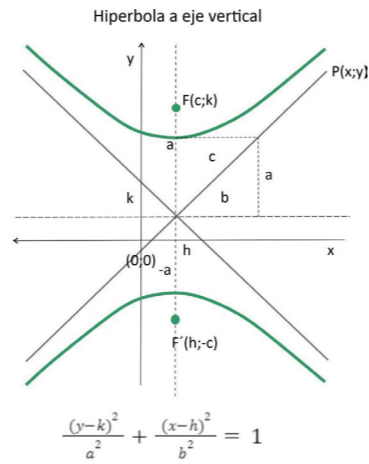
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



**Ecuación de la hipérbola** cuando el centro se encuentra en un punto  $P(h, k)$



Asíntotas  
 $\pm \frac{b}{a}(x-h) = (y-k)$



Asíntotas  
 $\pm \frac{a}{b}(x-h) = (y-k)$

**Excentricidad**

En el caso de la hipérbola, la excentricidad es siempre mayor a 1 y es el cociente entre la semidistancia focal (c) y el semieje mayor (a).

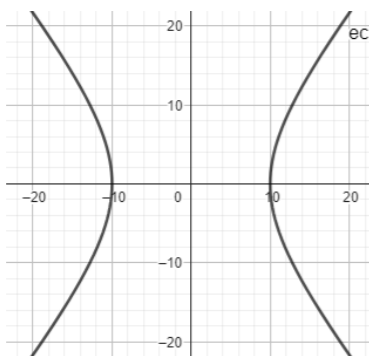
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$$

**Ejemplo Nro 1**

Hallar la ecuación de la hipérbola centrada en el origen, de eje real 20 y distancia focal 32

Hallamos  $b$ ,  $b^2 = a^2 - c^2 = 16^2 - 10^2 = 156$ , o sea  $b = \sqrt{156}$

La ecuación queda  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{156} = 1$

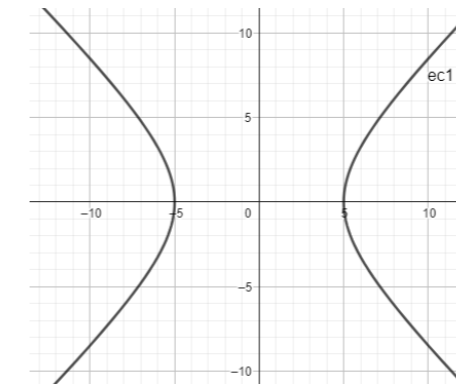


**Ejemplo Nro 2**

Hallar la ecuación de la hipérbola centrada en el origen, de excentricidad 1,4 y semidistancia focal 7

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{a} = 1,4 \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 7^2 - 5^2 = 24, \text{ o sea } b = \sqrt{24}$$



**Ejemplo Nro 3**

Hallar el eje mayor, los vértices y los focos de la siguiente hipérbola  $3x^2 - 6y^2 = 12$

Dividiendo por 12 ambos miembros se tiene la ecuación reducida

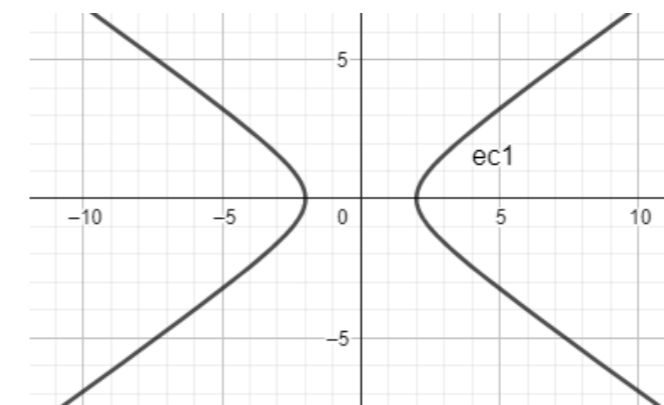
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$$

Eje mayor (real)  $2a = 2 \cdot \sqrt{4} = 4 \rightarrow a = 2$

Eje imaginario  $2b = 2\sqrt{2} \rightarrow b = \sqrt{2}$

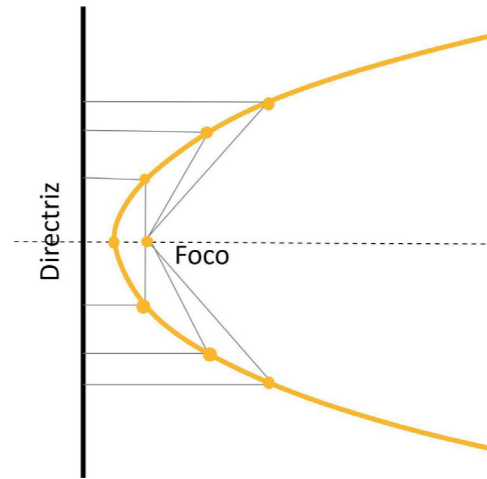
Vértices  $A(2,0), A'(-2,0), B(0,\sqrt{2}), B'(0,-\sqrt{2})$

Focos  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6} \rightarrow F(\sqrt{6}, 0) \text{ y } F'(-\sqrt{6}, 0)$



## La Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes a una recta y un punto fijo fuera de ella, denominándose a la recta, **directriz**, y al punto, **foco**.



### Elementos de la parábola

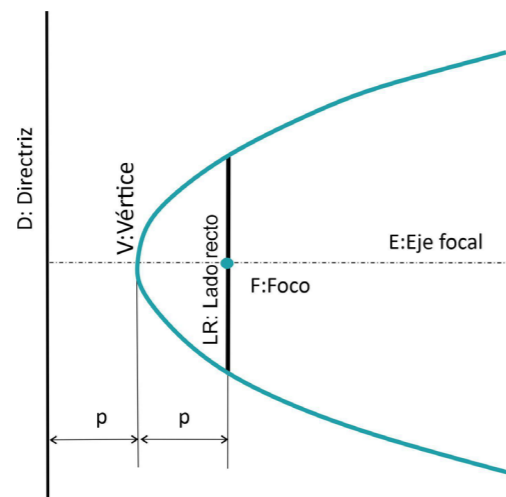
F: Foco, V: vértice

E: eje focal

D: recta directriz

P: distancia Foco-Vértice= distancia Vértice-directriz

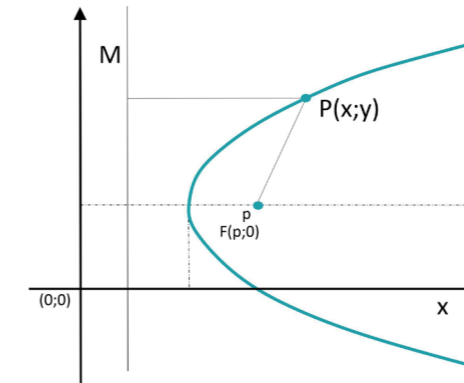
LR: Lado recto, cuerda que pasa por el foco  $LR = 4p$



### Ecuación de la parábola

Una parábola es el conjunto de los puntos  $(x,y)$  del plano, que están a la misma distancia de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz, que no contiene al foco.

Si el foco es  $(c,0)$  y la directriz es  $x=-c$ . Como  $d(P,F)=d(P,D)$



Calculamos ambas distancias d:

Por un lado  $d = p + x$  (Distancia horizontal de la recta directriz al punto P).

Por otro lado, la distancia del punto P al foco F la calculamos como distancia entre dos puntos

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$

Igualando:  $\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = p + x$

$$(p-x)^2 + y^2 = (p+x)^2$$

$$p^2 - 2px + x^2 + y^2 = p^2 + 2px + x^2$$

Suprimiendo términos que se anula y realizando pasaje

$$y^2 = 4px$$

(donde p es la distancia del foco al vértice, o sea, la distancia del foco a la recta directriz es 2p)

Ecuación de la hipérbola cuando el centro se encuentra en un

punto  $P(h, k)$

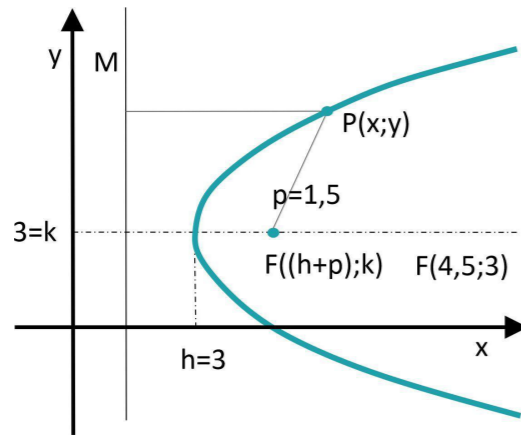
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

En el gráfico  $(h, k) = (3,3)$ , por lo tanto,

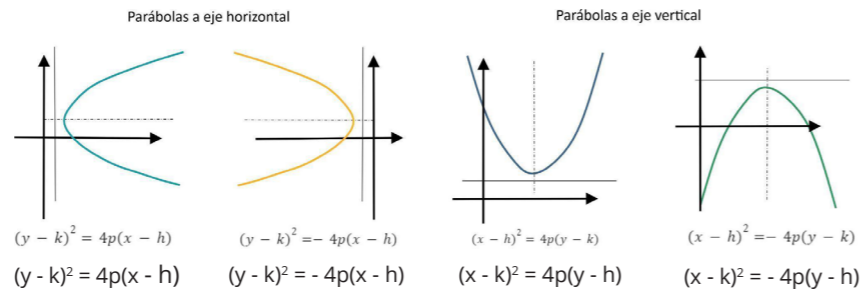
$$(y - 3)^2 = 4p(x - 3)$$

La distancia focal  $p = 1,5$ , entonces  $(y - 3)^2 = 6(x - 3)$





Ecuaciones de las Parábolas con ramas orientadas en distintos sentidos y ejes focales paralelos al eje x y al eje y



**Ejemplo Nro 1**

Dada la parábola  $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$ , calcular su vértice, su foco y la recta directriz.

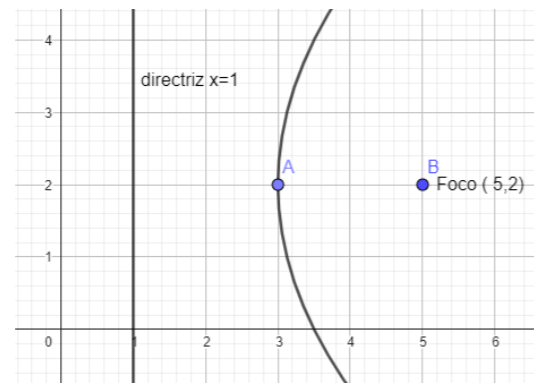
El parámetro  $4p = 8$ , por lo que  $p = 2$

Vértices en el punto  $P(2,3)$

El término cuadrático en la ecuación es la  $y$ , así que el eje de la parábola es paralelo al eje OX. Además, el coeficiente que acompaña al término no cuadrático (en este caso la  $x$ ) es 8 que es positivo, por lo que el foco está al lado derecho del vértice.

Focos  $F(3 + p, 2) = F(5,2)$ , Directriz  $x = x - p = 2 - 1 \quad x = 1$

La gráfica de la parábola  $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$



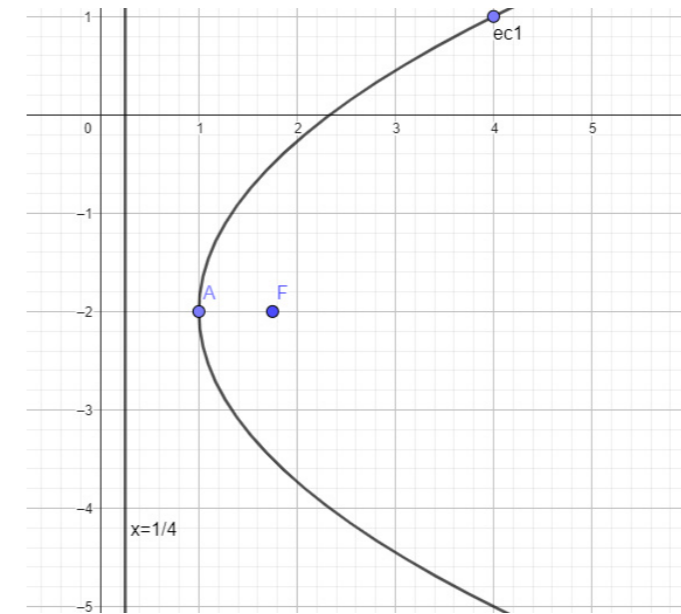
**Ejemplo Nro 2**

Hallar la ecuación de la parábola de eje paralelo al eje de las abscisas con vértice en  $V(1, -2)$  y pasa por el punto  $P(4,1)$

A partir de la ecuación de la parábola con vértice en  $P(h, k)$ , ramas horizontales  $(y - k)^2 = 4(x - h)$

Reemplazamos las coordenadas del vértice y del punto de paso  $(1 - (-2))^2 = 4p(4 - 1) \Rightarrow 9 = 4p \cdot 3$ , de donde  $p = 3/4$

Luego, la ecuación de la parábola  $(y + 2)^2 = 3(x - 1)$



**Algunas aplicaciones**

Las figuras cónicas, compuestas por la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, son figuras geométricas fundamentales con una amplia gama de aplicaciones en diversos campos del conocimiento y la práctica. Su relevancia radica en sus propiedades geométricas distintivas, que se traducen en aplicaciones prácticas y creativas en áreas como Astronomía, Física, Arquitectura, Ingeniería, Diseño industrial y Arte.

En el ámbito de la Astronomía y la Física, las cónicas tienen un papel crucial en la descripción de fenómenos naturales y artificiales. Por ejemplo, las órbitas de los planetas y cometas alrededor del Sol siguen trayectorias elípticas, lo que se explica mediante las propiedades de la elipse. Del mismo modo, los movimientos balísticos, como el lanzamiento de proyectiles, se modelan con trayectorias parabólicas, mientras que las lentes y espejos curvos utilizados en telescopios y otros dispositivos ópticos se basan en formas cónicas para



dirigir y enfocar la luz de manera eficiente.

En el ámbito de la Arquitectura e Ingeniería, las cónicas se manifiestan en la construcción de estructuras icónicas. Los arcos y bóvedas de edificios y puentes a menudo tienen forma de arco de circunferencia o elipse, lo que proporciona estabilidad y resistencia. Además, los perfiles aerodinámicos de alas de aviones y turbinas siguen curvas parabólicas o hiperbólicas para optimizar el flujo de aire y mejorar la eficiencia energética. Asimismo, los reflectores parabólicos se utilizan en antenas de comunicación y telescopios para captar y concentrar señales o luz de manera focalizada.

En el ámbito del Diseño industrial y el Arte, las cónicas se exploran en la creación de objetos funcionales y estéticos. Por ejemplo, las latas, botellas y otros recipientes pueden diseñarse con formas elípticas o parabólicas para mejorar su resistencia y ergonomía. Del mismo modo, los focos y reflectores de iluminación utilizan superficies parabólicas o elípticas para dirigir la luz de manera precisa y eficiente. Además, elementos arquitectónicos como cúpulas y detalles decorativos a menudo incorporan formas cónicas para añadir belleza y elegancia a los espacios.

En resumen, las cónicas son elementos matemáticos y geométricos con una amplia gama de aplicaciones prácticas y creativas en distintos ámbitos de la ciencia, la tecnología, la arquitectura y el diseño, destacando su versatilidad y relevancia en la sociedad moderna.

**Imagen 1**

[www.disenoyarquitectura.net/2009/04/silla-ball-de-ero-aarnio.html](http://www.disenoyarquitectura.net/2009/04/silla-ball-de-ero-aarnio.html)

**Imagen 2**

[esrawe.com/2018esrawe/es/edicion-limitada/parabola-2019/](http://esrawe.com/2018esrawe/es/edicion-limitada/parabola-2019/)

**Imagen 3**

[herrlicht.de/eng/etui.html](http://herrlicht.de/eng/etui.html)

**Imagen 4**

[mudic.es/sala-maria-skoldowska/](http://mudic.es/sala-maria-skoldowska/)

**Imagen 5**

[twenergy.com/energia/energia-solar/como-funciona-horno-solar-1809/](http://twenergy.com/energia/energia-solar/como-funciona-horno-solar-1809/)

**Imagen 6**

[obrasurbanas.es/museo-del-futuro-de-dubai-una-elipse-de-hormigon-y-acero/](http://obrasurbanas.es/museo-del-futuro-de-dubai-una-elipse-de-hormigon-y-acero/)

**Imagen 7**

[todo-fotografia.com/tecnica/los-objetivos/](http://todo-fotografia.com/tecnica/los-objetivos/)

**Imagen 8**

[es.quora.com/Por-que-las-torres-de-refrigeracion-de-las-centrales-nucleares-tienen-la-forma-que-tienen](http://es.quora.com/Por-que-las-torres-de-refrigeracion-de-las-centrales-nucleares-tienen-la-forma-que-tienen)



# 05.

## Guía de Ejercicios Nro 4 - Las Cónicas

### Ejercicio N° 1

El juego de aceitera, vinagrera, salero y pimentera "Fritz y Franz", creada por el Estudio Núcleo (Marcelo Cioffi, Federico Mangiaterra y Andrés Socolovsky), está compuesta por una serie de circunferencias.



Estudio Núcleo

Se te pide en cada caso, hallar la ecuación de la circunferencia:

- Centro en  $P(0; -2)$  y radio 3.
- Centro en  $P(2; 1)$  y pasa por  $Q(5; -4)$ .
- $P(2; 3)$  y  $Q(-4; 7)$  son extremos de un diámetro.
- Pasa por  $P(0; 3)$ ,  $Q(2; 3)$  y  $R(2; 1)$ .
- Centro en  $(4; 5)$  y tangente a  $3x - 4y - 12 = 0$ .

### Ejercicio N° 2

Determinar en cada caso, el radio y el centro de la circunferencia, si es que existe:

- $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$
- $9x^2 + 9y^2 - 12x + 24y + 11 = 0$

### Ejercicio N° 3

Determinar la ecuación de la elipse y sus características:

- Centro en el origen, un vértice en  $(0; -7)$  y pasa por  $(4, 3)$ .
- Centro en el origen, su eje mayor coincide con el eje X y pasa por  $P(3; 1,6)$  y  $Q(1; \sqrt{3,84})$ .
- Los focos de una elipse son los puntos  $(3; 8)$  y  $(3; 2)$  y la longitud de su eje menor es 8.

#### Ejercicio N° 4

- a. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos  $(2; 3)$ ,  $(-1; 5)$  y  $(4; -2)$ .
- b. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en  $(0;0)$  y foco en  $(0; 4)$ .
- c. Determina la ecuación de la hipérbola con centro en  $(-1;2)$ , semiejes de longitudes 3 y 2, y cuya asíntota oblicua forma un ángulo de  $45^\circ$  con el eje X positivo.
- d. Halla la ecuación de la elipse con focos en  $(0; 3)$  y cuya longitud del semieje mayor es 5.
- e. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en  $(-2; 1)$  y directriz  $x = 3$ .
- f. Determina la ecuación de la hipérbola con focos en  $(\pm 3; 0)$  y cuya longitud del semieje real es 4.
- g. Halla la ecuación de la elipse con focos en  $(\pm 4, 0)$  y cuya longitud del semieje mayor es 6.
- h. Encuentra la ecuación de la parábola con vértice en  $(2; -3)$  y foco en  $(2; 1)$ .







✧ UNRaf  
Ediciones

